Índice: Cálculo de áreas. Ejemplos. Problemas.

1.- Cálculo de áreas

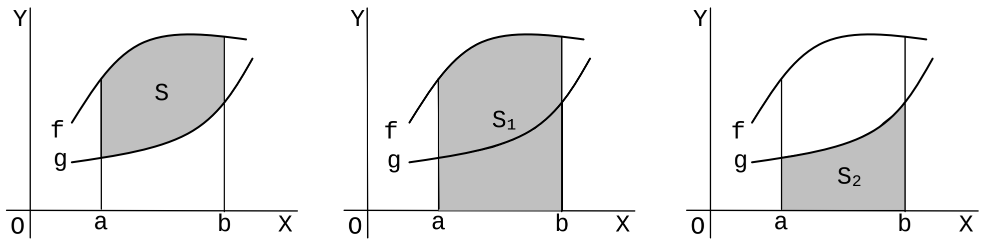
Si f y g son dos funciones continuas en el intervalo [a,b] tales que $f\geq g$, entonces el área de la región del plano limitada por sus gráficas y las rectas x=a y x=b viene dada por la fórmula:

$$S=\int_a^b (f-g)$$

Veamos primero que la fórmula es cierta cuando ambas funciones son no negativas.

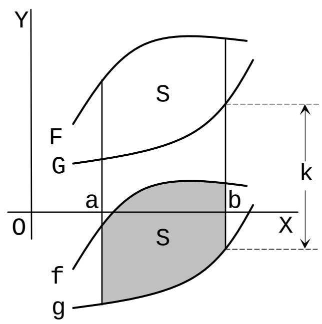
Evidentemente:

$$S=S_1-S_2 \overset{1}{=} \int_a^b f-\int_a^b g \overset{2}{=} \int_a^b (f-g)$$



Veamos ahora que también es cierta la fórmula en los demás casos.

Si la región del plano limitada por las gráficas de f y g no se encontrase situada por encima del eje de abscisas, como aparece en el siguiente dibujo, podríamos trasladar verticalmente dicha región hasta que lo estuviese.



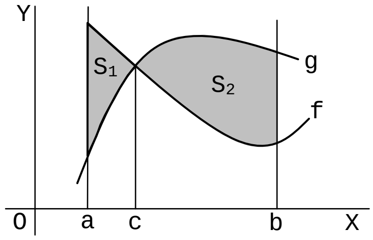
Si $F(x)=f(x)+k$ y $G(x)=g(x)+k$, esto es, si las gráficas de F y G se han obtenido trasladando verticalmente hacia arriba las de f y g, respectivamente, una distancia k, es evidente que el área encerrada por las gráficas de F y G es la misma que la que encierran las de f y g. Por tanto:

$$S \overset{3}{=} \int_a^b (F-G)=\int_a^b ([f+k]-[g+k])=\int_a^b (f+k-g-k)=\int_a^b (f-g)$$

En el caso de que las funciones f y g tengan puntos de corte en el intervalo [a,b], se hallan dichos puntos y se estudia la posición relativa de las funciones en cada uno de los subintervalos en que esos puntos de corte dividen al intervalo [a,b]; allí donde $f>g$, se

[1] Por el significado geométrico de la integral definida de una función continua y no negativa en [a,b], visto en la lección I-2.
[2] Por la propiedad de linealidad de la integral definida.
[3] Ya que F y G son funciones continuas y no negativas en [a,b] tales que $F\geq G$.

toma la integral de f-g con signo positivo (o la de g-f con signo negativo) y donde g>f, la de g-f con signo positivo (o la de f-g con signo negativo).



Si c es, por ejemplo, el único punto de corte, el área señalada es:

$$S=S_1+S_2 \overset{1}{=} \int_a^c (f-g)+\int_c^b (g-f)$$

* * *

Si se quiere evitar el estudio de la posición relativa de las funciones f y g en cada uno de los subintervalos, puede utilizarse la fórmula equivalente:

$$S=\left|\int_a^c (f-g)\right|+\left|\int_c^b (f-g)\right|$$

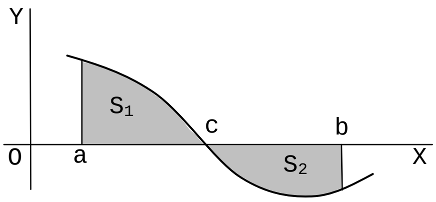
En efecto:

$$\int_a^c (f-g)+\int_c^b (g-f) \overset{2}{=} \left|\int_a^c (f-g)\right|+\left|\int_c^b (g-f)\right| \overset{3}{=} \left|\int_a^c (f-g)\right|+\left|-\int_c^b (f-g)\right| \overset{4}{=}$$

$$=\left|\int_a^c (f-g)\right|+\left|\int_c^b (f-g)\right|$$

* * *

Observa que las fórmulas anteriores también se pueden aplicar al área limitada por la gráfica de una función continua en [a,b], el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b, pues en este caso la segunda función es g(x)=0:



$$S=S_1+S_2 \overset{5}{=} \int_a^c f-\int_c^b f \overset{3}{=} \int_a^c (f-0)+\int_c^b (0-f)$$

2.- Ejemplos

Calculemos el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $y=\operatorname{sen} x$, el eje de abscisas y las rectas $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$.

---

[1] Si se desea que la función integrando sea la misma, la fórmula, por la propiedad de linealidad de la integral definida, puede escribirse así:

$$s=\int_a^c (f-g)-\int_c^b (f-g)$$

[2] Ya que un número no negativo coincide con su valor absoluto.
[3] Por la propiedad de linealidad de la integral definida.
[4] Ya que dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto.
[5] Por el significado geométrico de la integral definida de una función continua en [a,b], visto en la lección I-3.

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\operatorname{sen} x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen} x=0 \Rightarrow x=0+k\pi \overset{1}{\Rightarrow} x=0$$

2º) Averiguamos entre $-\pi/2$ y 0 y entre 0 y $\pi/2$ qué función está por encima y qué función está por debajo:[2]

x	y_1	y_2
$-\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	0

3º) Hallamos el área:[3]

$$A=\int_{-\pi/2}^{0}(0-\operatorname{sen} x)\cdot dx+\int_{0}^{\pi/2}(\operatorname{sen} x-0)\cdot dx \overset{4}{=} -\int_{-\pi/2}^{0}\operatorname{sen} x\cdot dx+\int_{0}^{\pi/2}\operatorname{sen} x\cdot dx \overset{5}{=}$$

$$=[\cos x]_{-\pi/2}^{0}+[-\cos x]_{0}^{\pi/2}=[\cos 0-\cos(-\pi/2)]+[-\cos(\pi/2)+\cos 0]=$$

$$=(1-0)+(-0+1)=1+1=2$$

* * *

Calculemos el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones $y=x^3-2x+1$ e $y=x^2+1$.

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^3-2x+1 \\ y=x^2+1 \end{cases} \Rightarrow x^3-2x+1=x^2+1 \Rightarrow x^3-2x+1-x^2-1=0 \Rightarrow x^3-x^2-2x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2-x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 0 y entre 0 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
-1/2	15/8	10/8
1	0	2

3º) Hallamos el área:

$$A=\int_{-1}^{0}[(x^3-2x+1)-(x^2+1)]\cdot dx+\int_{0}^{2}[(x^2+1)-(x^3-2x+1)]\cdot dx=$$

---

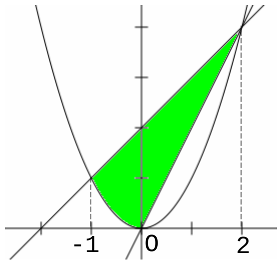
[1] Sólo interesan las soluciones que se encuentran en el intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$.
[2] Estos dos pasos sobran si se tiene dibujado con precisión el recinto cuya área queremos calcular.
[3] Si se repara en la simetría que presenta la función (se trata de una función impar), puede reducirse el cálculo al intervalo $[0,\pi/2]$ y multiplicar el resultado por 2.
[4] Por la propiedad de linealidad de la integral definida.
[5] La correspondiente integral indefinida es inmediata de tipo coseno.

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\cdot dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)\cdot dx \stackrel{1}{=} \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=$$

$$=\left[0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right]+\left[\left(-4+\frac{8}{3}+4\right)-0\right]=-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}=\frac{-3-4+12+32}{12}=\frac{37}{12}$$

* * *

Calculemos el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $y=x^2$ y las rectas $y=2x$ e $y=x+2$.



Al representar las gráficas de las tres funciones[2] observamos que la región que definen puede dividirse en dos: la comprendida entre -1 y 0, en la que $y=x+2$ es la función que se encuentra por encima e $y=x^2$ la que se encuentra por debajo; y la comprendida entre 0 y 2, en la que $y=x+2$ está por encima e $y=2x$, por debajo.

Por tanto

$$A=\int_{-1}^{0}(x+2-x^2)\cdot dx+\int_{0}^{2}(x+2-2x)\cdot dx=\int_{-1}^{0}(2+x-x^2)\cdot dx+\int_{0}^{2}(2-x)\cdot dx \stackrel{1}{=}$$

$$=\left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=\left[0-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]+[(4-2)-0]=$$

$$=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2=\frac{12-3-2+12}{6}=\frac{19}{6}$$

3.- Problemas

1) Calcula el área de los recintos limitados por las siguientes líneas:

- **a)** $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $x=4$
- **b)** $y=x^2$, $y=x$
- **c)** $y=x^2-4x$, $y=2x-5$
- **d)** $y=x^3-6x^2+8x$, OX
- **e)** $y=x^3$, OX, $x=0$, $x=2$
- **f)** $y=2\sqrt{x}$, $y=x$
- **g)** $y=-x^2$, $y=-1$
- **h)** $y=x^4-5x^2+4$, OX
- **i)** $y=\cos x$, OX, $x=0$, $x=2\pi$
- **j)** $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$
- **k)** $y=\sqrt{2x+1}$, OX, $x=0$, $x=4$
- **l)** $y=e^x(x^2+1)$, OX, $x=0$, $x=1$
- **m)** $y=x^4-2x^2$, $y=2x^2$
- **n)** $y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\pi/2$
- **ñ)** $y=e^x$, $y=e^{-x}$, OX, $x=-1$, $x=1$
- **o)** $y=x(x-1)(x-2)$, OX
- **p)** $x\cdot y=36$, OX, $x=6$, $x=24$
- **q)** $f(x)=|x|$, $g(x)=2x^2-1$
- **r)** $y=1/x$, $2x+3y-7=0$
- **s)** $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=6x-x^2$

[1] Las correspondientes integrales indefinidas son inmediatas de tipo potencial.
[2] Siempre es conveniente dibujar el recinto cuya área se pide calcular, pero cuando dicho recinto está limitado por más de dos funciones es necesario hacerlo.

2) Halla el área del triángulo mixtilíneo formado por la gráfica de la parábola $y^2=6x$ y sus tangentes en los puntos de corte con la recta $x=6$.

3) Calcula el área comprendida entre la parábola $y=-x^2+4x$ y sus tangentes en los puntos de intersección con el eje OX.

4) Halla el área del recinto limitado por la curva $y=x\cdot e^x$, el eje OX y la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto mínimo de la curva.

5) Calcula el área comprendida entre la curva $y=2x+1+1/x^2$, su asíntota oblicua y las rectas $x=1$ y $x=2$.

6) Halla el área de la región del plano limitada por la curva de ecuación $y=x^4-6x^2+5$, el eje OX y las rectas paralelas al eje de ordenadas que pasan por sus puntos de inflexión.

7) Las tangentes a la curva $y=x^3$ en los puntos A y B de abscisas 1 y 2, respectivamente, se cortan en el punto C. Determina el área del triángulo mixtilíneo ABC.

8) Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=-e^x$, $y=-e^{-x}$ y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

9) Se tiene un cuadrado determinado por los ejes coordenados y el vértice (1,1). La curva $y=x^3$ lo divide en dos regiones. Halla la razón de las áreas de esas dos regiones.

10) Dada la recta $y=mx$, determina el valor de m para que el área del recinto limitado por dicha recta y la curva

a) $y=x^2$ valga 36 **b)** $y=x^3$ valga 8

11) Un río tiene por ecuación $y=x^3/4-x^2+x$ respecto de un sistema en el que el eje de abscisas es un camino. Tomando como unidad el km y sabiendo que el precio del terreno es de 2,5 €/m², calcula el valor de la porción de terreno comprendida entre el río y el camino.

12) Dada la función $f(x)=x(x-a)^2$, se pide: a) el valor de a para que presente un máximo en $x=1$; b) la gráfica de f; c) el área de la región que define con el eje OX.

13) Halla, mediante una integral definida:

a) El área de un rectángulo de base a y altura b.
b) El área de un triángulo rectángulo de base a y altura b.
c) El área de un trapecio rectángulo de altura h y bases b y B.
d) El área del circulo de radio r.
e) El área de la elipse de ecuación $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

14) Sea f una función continua en [a,b] y R la región del plano limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b. El volumen del cuerpo de revolución engendrado por R al girar alrededor del eje de abscisas se obtiene con la fórmula $V=\pi\cdot\int_a^b f^2$. Teniendo esto en cuenta, calcula:

a) El volumen del cilindro de altura h y radio de la base r.

b) El volumen del cono de altura h y radio de la base r.

c) El volumen del tronco de cono de altura h y radios de las bases r y R.

d) El volumen de la esfera de radio r.

e) El volumen del elipsoide que resulta al girar alrededor del eje de abscisas la elipse de ecuación $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

15) El área de la superficie de revolución engendrada al girar alrededor del eje de abscisas la gráfica de una función f entre a y b viene dada por la fórmula $S=2\pi\cdot\int_a^b f\cdot\sqrt{1+f'^2}$. Teniendo esto en cuenta, halla:[1]

a) El área del cilindro de altura h y radio de la base r.

b) El área del cono de altura h y radio de la base r.

c) El área del tronco de cono de altura h y radios de las bases r y R.

d) El área de la esfera de radio r.

16) La longitud de la gráfica de f entre x=a y x=b viene dada mediante la fórmula $L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2}$. Teniendo esto en cuenta, calcula la longitud de la circunferencia.[1]

17) Encuentra el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x)=\cos x/\sqrt{1-\operatorname{sen} x}$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=\pi/2$.[2]

18) Calcula el área de la región del plano situada en el primer cuadrante y comprendida entre la función $f(x)=(2+\operatorname{sen} x)/e^x$ y su asíntota.

19) Halla el área de la región del plano que se encuentra situada entre la gráfica de la función $y=1/(x^2+9)$ y su asíntota.

[1] La función integrando debe ser continua en [a,b].
[2] Observa que la función no está definida en $x=\pi/2$.