1) (1p) Define rango de una matriz.

2) (1p) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

3) (1p) Enuncia las propiedades de las matrices inversibles.

4) (2p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x+2ky+z=1 \\ x+3ky+2z=2 \\ x+2ky+kz=k^2 \end{cases}$$

5) (2p) Si $x=\alpha+\beta+3\gamma$, $y=1-\alpha+\beta+\gamma$ y $z=\alpha+2\beta+5\gamma$:

a) Elimina los parámetros.

b) Resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.

6) (1,5p) Dada la matriz A, calcula A^n:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) (1,5p) Resuelve la siguiente ecuación matricial y comprueba el resultado:

$$X\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: *Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:*

$$\begin{cases} x+2ky+z=1 \\ x+3ky+2z=2 \\ x+2ky+kz=k^2 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2k & 1 & 1 \\ 1 & 3k & 2 & 2 \\ 1 & 2k & k & k^2 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2k & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{k} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{k-1} & k^2-1 \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} \begin{cases} k=0 \\ k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[3]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{4}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=1 \end{cases}$$

2º) Si k=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y-1+y \\ z=1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+2ky+z=1 \\ ky+z=1 \\ (k-1)z=(k+1)(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=k+1} \Rightarrow ky=1-z=1-k-1=-k \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-2ky-z=1+2k-k-1=k \Rightarrow \boxed{x=k}$$

[1] 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
[2] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
[3] Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.
[4] 3ªf+2ªf.

Ejercicio 5: *Si $x=\alpha+\beta+3\gamma$, $y=1-\alpha+\beta+\gamma$ y $z=\alpha+2\beta+5\gamma$:* ***a)*** *elimina los parámetros;* ***b)*** *resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.* (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=x\\ -\alpha+\beta+\gamma=y-1\\ \alpha+2\beta+5\gamma=z\end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&x\\-1&1&1&y-1\\1&2&5&z\end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&x\\0&2&4&x+y-1\\0&1&2&-x+z\end{array}\right) \overset{2}{\approx}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&x\\0&1&2&-x+z\\0&2&4&x+y-1\end{array}\right) \overset{3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&x\\0&1&2&-x+z\\0&0&0&3x+y-2z-1\end{array}\right) \to 3x+y-2z=1$$

b) Como el sistema es de una sola ecuación, la solución es inmediata:

$$3x+y-2z=1 \Rightarrow y=1-3x+2z \Rightarrow \begin{cases}x=a\\ y=1-3a+2b\\ z=b\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

---

1 2^af+1^af; 3^af-1^af.

2 2^af↔3^af.

3 3^af-2·2^af.

Ejercicio 6: *Dada la matriz A, calcula A^n:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 8\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2n\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 7: *Resuelve la siguiente ecuación matricial y comprueba el resultado:*

$$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Trasponemos los dos miembros de la ecuación matricial:

$$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot X'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}-1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4\\ 3 & 1 & -2 & -2 & -1\end{array}\right)\overset{1}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|cc}-1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 4 & -2 & -2 & 2\end{array}\right)\overset{2}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|cc}-1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\overset{3}{\approx}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}-1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\overset{4}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\overset{5}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\to$$

$$\to X'=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+0 & 0+0+1 & 0+0-2\\ -2+3+0 & 2-3+5 & 6+3-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

* * *

También puede hacerse de la siguiente manera. Si $X\cdot A=B$ es la ecuación matricial planteada, se calcula por Gauss la inversa de A y se despeja X:

$$X\cdot A=B \Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$$

1 2ªf+1ªf; 3ªf+3·1ªf.
2 2ªf↔3ªf.
3 2ªf+2·3ªf.
4 1ªf·(-1); 2ªf·1/4.
5 1ªf+2ªf.