

1) (1p) Define:

a) Sistemas equivalentes.

b) Matrices equivalentes.

2) (1p) Enuncia las propiedades de la trasposición de matrices.

3) (1p) Prueba que si A es inversible y $A \cdot X = I$, entonces $X = A^{-1}$.

4) (2p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} x+y-z=1 \\ kx-y+z=k \\ x-ky+3z=k \end{array} \right\}$$

5) (1,6p) Si $x=1-\alpha+\beta-\gamma$, $y=\alpha+\beta+\gamma$ y $z=\alpha-\beta+\gamma$:

a) Elimina los parámetros.

b) Resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.

6) (1,6p) Si $B^k=0$, prueba que $(I-B)^{-1}=I+B+B^2+\dots+B^{k-1}$.

(Nota: B es una matriz cuadrada de orden n, 0 es la matriz nula de orden n e I es la matriz unidad de dicho orden).

7) (1,8p) Calcula la matriz X y comprueba el resultado si:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ kx-y+z=k \\ x-ky+3z=k \end{cases}$$

* * *

(2 Puntos)

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ k & -1 & 1 & k \\ 1 & -k & 3 & k \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-k & 1+k & 0 \\ 0 & -1-k & 4 & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-k & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 3-k & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -1-k=0 \\ 3-k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=3 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $k=-1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-1/2 \\ z=-1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1/2 \end{cases}$$

2º) Si $k=3$, el sistema es incompatible:⁴

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -(1+k)y+(1+k)z=0 \\ (3-k)z=k-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=\frac{k-1}{3-k}} \Rightarrow -(1+k)y=-(1+k) \cdot \frac{k-1}{3-k} \Rightarrow \boxed{y=\frac{k-1}{3-k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-\frac{k-1}{3-k}+\frac{k-1}{3-k} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

¹ $2af-k \cdot 1af$; $3af-1af$.

² $3af-2af$.

³ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

⁴ Ya que la última ecuación es incompatible.

Ejercicio 5: Si $x=1-\alpha+\beta-\gamma$, $y=\alpha+\beta+\gamma$ y $z=\alpha-\beta+\gamma$: **a)** elimina los parámetros; **b)** resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} -\alpha+\beta-\gamma=x-1 \\ \alpha+\beta+\gamma=y \\ \alpha-\beta+\gamma=z \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & x-1 \\ 0 & 2 & 0 & x+y-1 \\ 0 & 0 & 0 & x+z-1 \end{array} \right) \rightarrow x+z-1=0$$

b) Como el sistema es de una sola ecuación, la solución es inmediata:

$$x+z-1=0 \Rightarrow x=1-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-b \\ y=a \\ z=b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¹ $2^a f + 1^a f$; $3^a f + 1^a f$.

Ejercicio 6: Si $B^k=0$, prueba que $(I-B)^{-1}=I+B+B^2+\dots+B^{k-1}$.

(Nota: B es una matriz cuadrada de orden n , 0 es la matriz nula de orden n e I es la matriz unidad de dicho orden).

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos la definición de matriz inversa:

$$\bullet (I-B) \cdot (I+B+B^2+\dots+B^{k-1}) = I^2 + IB + IB^2 + \dots + IB^{k-1} - BI - B^2 - B^3 - \dots - B^{k-1} - B^k =$$

$$= I + B + B^2 + \dots + B^{k-1} - B - B^2 - B^3 - \dots - B^{k-1} - B^k = I - B^k \stackrel{1}{=} I$$

$$\bullet (I+B+B^2+\dots+B^{k-1}) \cdot (I-B) = I^2 - IB + BI - B^2 + B^2I - B^3 + \dots + B^{k-1}I - B^k =$$

$$= I - B + B - B^2 + B^2 - \dots - B^{k-1} + B^{k-1} - B^k = I - B^k \stackrel{1}{=} I$$

Por tanto, $I-B$ es la inversa de $I+B+B^2+\dots+B^{k-1}$.

¹ Ya que $B^k=0$.

Ejercicio 7: Calcula la matriz X y comprueba el resultado si:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

* * *

(1, 8 PUNTOS)

Solución:

Trasponemos los dos miembros de la ecuación matricial:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X' = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+3 & -5+1+3 & 0+0+3 \\ 0+4-1 & 7-4-1 & 0+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

* * *

También puede hacerse de la siguiente manera. Si $X \cdot A = B$ es la ecuación planteada, se puede calcular la inversa de A por el método de Gauss y despejar X :

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

¹ $1^{\text{af}} \leftrightarrow 2^{\text{af}}$.

² $2^{\text{af}} - 3^{\text{af}}$; $1^{\text{af}} - 3^{\text{af}}$.

³ $1^{\text{af}} + 2^{\text{af}}$.