1) (1p) Enuncia las transformaciones elementales de sistemas.

2) (1p) Define:

a) Rango de una matriz.

b) Matriz inversible.

3) (1p) Demuestra:

a) La inversa de A, si existe, es única.

b) [A+B]'=A'+B'.

4) (2p) Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} kx+y=k \\ kx+z=k \\ ky+z=k \end{cases}$$

5) (1,6p) Si $x=1+2\alpha-3\beta-\gamma$, $y=\alpha-\beta$ y $z=2+3\alpha-\beta+2\gamma$:

a) Elimina los parámetros.

b) Resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.

6) (1,6p) Dada la matriz A:

a) Halla la matriz $B=A^n$.

b) Prueba por el método de inducción completa que $A^n=B$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

7) (1,8p) Dadas las matrices A y B:

a) Calcula la inversa de A.

b) Halla X si X·A=B.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} kx+y=k \\ kx+z=k \\ ky+z=k \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & k \\ k & 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 & k \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 & k \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{k} & 1 & 0 & k \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1+k} & k \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow} \begin{cases} k=0 \\ 1+k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=-1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=-1, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

2º) Si k=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[5]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} kx+y=k \\ -y+z=0 \\ (k+1)z=k \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{k}{k+1}} \Rightarrow y=z \Rightarrow \boxed{y=\frac{k}{k+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kx=k-y=k-\frac{k}{k+1}=\frac{k^2+k-k}{k+1}=\frac{k^2}{k+1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{k}{k+1}}$$

---

1 2ªf-1ªf.
2 3ªf+k·2ªf.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
4 Ya que la última ecuación es incompatible.
5 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.
6 2ªf+1ªf.
7 3ªf-2ªf.

Ejercicio 5: *Si $x=1+2\alpha-3\beta-\gamma$, $y=\alpha-\beta$ y $z=2+3\alpha-\beta+2\gamma$:* ***a)*** *elimina los parámetros;* ***b)*** *resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.* (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2\alpha-3\beta-\gamma=x-1 \\ \alpha-\beta=y \\ 3\alpha-\beta+2\gamma=z-2 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & x-1 \\ 1 & -1 & 0 & y \\ 3 & -1 & 2 & z-2 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & y \\ 2 & -3 & -1 & x-1 \\ 3 & -1 & 2 & z-2 \end{array}\right) \overset{2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & y \\ 0 & -1 & -1 & x-2y-1 \\ 0 & 2 & 2 & -3y+z-2 \end{array}\right) \overset{3}{\approx}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & y \\ 0 & -1 & -1 & x-2y-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x-7y+z-4 \end{array}\right) \to 2x-7y+z=4$$

b) Como el sistema es de una sola ecuación, la solución es inmediata:

$$2x-7y+z=4 \Rightarrow z=4-2x+7y \Rightarrow \begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=4-2a+7b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1 1ªf↔2ªf.
2 2ªf-2·1ªf; 3ªf-3·1ªf.
3 3ªf+2·2ªf.

Ejercicio 6: *Dada la matriz A: **a)** halla la matriz $B=A^n$; **b)** prueba por el método de inducción completa que $A^n=B$.*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Calculamos A^n:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 15 & 16\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 15 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 63 & 64\end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 63 & 64\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 255 & 256\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$B=A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4^n-1 & 4^n\end{pmatrix}$$

b) Hay que demostrar por el método de inducción completa la fórmula siguiente:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4^n-1 & 4^n\end{pmatrix}$$

1º) La fórmula es cierta para n=1:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4^1-1 & 4^1\end{pmatrix}$$

2º) Si la fórmula es cierta para n=k, entonces es cierta también para n=k+1:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}^k\overset{1}{=}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4^k-1 & 4^k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3+4(4^k-1) & 4\cdot 4^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3+4^{k+1}-4 & 4^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4^{k+1}-1 & 4^{k+1}\end{pmatrix}$$

[1] Ya que la fórmula es cierta para n=k.

Ejercicio 7: *Dadas las matrices A y B:* ***a)*** *calcula la inversa de A;* ***b)*** *halla X si X·A=B.*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Calculamos la inversa de A por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+2 & 0+2-2 & 0-2+2 \\ 3-2-1 & -4+4+1 & 5-4-1 \\ 3-1-2 & -4+2+2 & 5-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallamos X:

$$X\cdot A=B \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X\cdot I=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=B\cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1-2 & -4+2+2 & 5-2-2 \\ 3-2-1 & -4+4+1 & 5-4-1 \\ 0-1+2 & 0+2-2 & 0-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$X\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+1 & 0+0+2 \\ 0+1+0 & 0+2+0 & 0+1+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & -2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = B$$

---

1 1ªf↔2ªf.
2 3ªf-1ªf.
3 3ªf+2ªf.
4 2ªf-2·3ªf; 1ªf+3ªf.
5 1ªf-2·2ªf; 3ªf·(-1).