

1) (1p) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

2) (1p) Define rango de una matriz.

3) (2p) Demuestra las siguientes propiedades:

a) La inversa de la matriz A, si existe, es única.

b) Si la matriz A es inversible, entonces la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa.

4) (2p) Discute y resuelve el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} ax-2y+z=1 \\ x-2ay+z=-2 \\ x-2y+az=1 \end{array} \right\}$$

5) (2p) Elimina los parámetros y resuelve el sistema a que da lugar dicha eliminación, expresando su solución en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x=a-b+c \\ y=2a-c \\ z=a+b-2c \end{cases}$$

6) (2p) Halla la inversa, si existe, de la matriz A y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4:** Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ax-2y+z=1 \\ x-2ay+z=-2 \\ x-2y+az=1 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2a & 1 & -2 \\ 1 & -2 & a & 1 \end{pmatrix} \stackrel{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & -2a & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 2-2a & 1-a & -3 \\ 0 & 2a-2 & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix} \stackrel{3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 2-2a & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -2-a \end{pmatrix} \stackrel{4}{\rightarrow} \begin{cases} 2-2a=0 \\ -a^2-a+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1\pm 3}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

**1º)** Si  $a=-2$ , el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 6y+3z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2y-2z \\ z=-1-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1-2\alpha \end{cases}$$

**2º)** Si  $a=1$ , el sistema es incompatible:<sup>5</sup>

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**3º)** En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x-2y+az=1 \\ 2(1-a)y+(1-a)z=-3 \\ (-a^2-a+2)z=-a-2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{-a-2}{-a^2-a+2} \stackrel{6}{=} \frac{-(a+2)}{-(a+2)(a-1)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1-a)y = -3 - (1-a) \cdot \frac{1}{a-1} = -3 + (a-1) \cdot \frac{1}{a-1} = -2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 + 2 \cdot \frac{1}{a-1} - a \cdot \frac{1}{a-1} = \frac{a-1+2-a}{a-1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{a-1}}$$

<sup>1</sup>  $1^a f \leftrightarrow 3^a f$ .

<sup>2</sup>  $2^a f - 1^a f$ ;  $3^a f - a \cdot 1^a f$ .

<sup>3</sup>  $3^a f + 2^a f$ .

<sup>4</sup> Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

<sup>5</sup> Ya que las dos últimas ecuaciones son incompatibles.

<sup>6</sup> Factorizamos el denominador.

**Ejercicio 5:** Elimina los parámetros y resuelve el sistema a que da lugar dicha eliminación, expresando su solución en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x=a-b+c \\ y=2a-c \\ z=a+b-2c \end{cases} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

**a)** Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} a-b+c=x \\ 2a-c=y \\ a+b-2c=z \end{cases} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 2 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & -2 & z \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -3 & -2x+y \\ 0 & 2 & -3 & -x+z \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim}$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -3 & -2x+y \\ 0 & 0 & 0 & x-y+z \end{array} \right) \rightarrow x-y+z=0$$

**b)** Como el sistema es de una sola ecuación, la solución es inmediata:

$$x-y+z=0 \Rightarrow x=y-z \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>  $2^{\text{af}}-2 \cdot 1^{\text{af}}; 3^{\text{af}}-1^{\text{af}}$ .

<sup>2</sup>  $3^{\text{af}}-2^{\text{af}}$ .

**Ejercicio 6:** Halla la inversa, si existe, de la matriz A y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim} \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{4}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & -1+0+1 \\ 1/2-1/2+0 & 0+1+0 & -1/2-1/2+1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup> 2<sup>af</sup>·2.

<sup>2</sup> 2<sup>af</sup>-1<sup>af</sup>.

<sup>3</sup> 2<sup>af</sup>-3<sup>af</sup>; 1<sup>af</sup>-3<sup>af</sup>.

<sup>4</sup> 1<sup>af</sup>·1/2; 2<sup>af</sup>·1/4.