Índice: Criterio de la derivada primera. Criterio de la derivada segunda. Criterio de la derivada enésima. Problemas.

1.- Criterio de la derivada primera

Si f está definida en un entorno de x_0 y $f'(x_0)\neq 0$, entonces:

a) $f'(x_0)>0$ implica que f es creciente en x_0.

b) $f'(x_0)<0$ implica que f es decreciente en x_0.

* * *

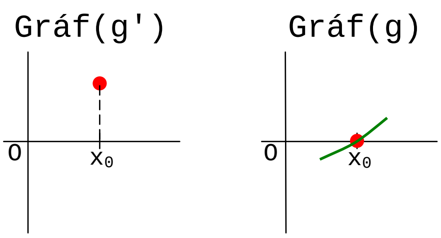
Demostremos,[1] por ejemplo, el primer apartado.

1º) Señalamos en rojo[2] lo que conocemos de la función g y sus derivadas:[3]

- Como $g(x_0)=0$, el punto $(x_0,0)$ pertenece a la gráfica de g.
- Como $g'(x_0)=f'(x_0)>0$, el punto $(x_0,f'(x_0))$ pertenece a la gráfica de g' (sólo sabemos que está por encima del eje de abscisas).

2º) Deducimos el comportamiento de g en x_0:

- Como $g'(x_0)>0$, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en x_0 también es positiva; y como la tangente y la gráfica de la función prácticamente coinciden en las proximidades del punto de tangencia, podemos[4] dibujar (verde) la gráfica de la función g.



CONCLUSIÓN: la función g es creciente[5] en x_0. Por tanto, f también.

* * *

Para estudiar la monotonía de una función bastará, pues, calcular el signo de su derivada. Allí donde ésta sea positiva, la función será creciente; y donde sea negativa, decreciente.

* * *

Por ejemplo, analicemos la monotonía de la función $f(x)=4x^5-5x^4$.

Tenemos que averiguar el signo de $f'(x)=20x^4-20x^3=20x^3(x-1)$:

[1] Puedes intentarlo por tu cuenta. Basta que hagas los casos 1) y 2) del EJERCICIO 4 contenido en *Ejercicio 6.1* (ver *Resúmenes*, en este mismo *blog*).
[2] Como las demostraciones que vamos a hacer consisten en una sucesión de pasos, utilizaremos colores para poderlos seguir en su orden.
[3] Recuerda las propiedades de la función g.
[4] Como f está definida en un entorno de x_0, g también, ya que Dom(g)=Dom(f).
[5] Para indicar que la función g es *creciente en x_0* se ha dibujado su gráfica *creciente en un entorno de x_0*, que es lo que suele pasar normalmente con las funciones que se estudian en bachillerato. Ahora bien, esto no tiene por qué ser así, pero su justificación se sale del programa de este curso. (Esta nota es de aplicación siempre que se produzca la misma situación. Así que no la repetiremos cada vez que ésta se presente.)

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f' es	+	-	+
f es	creciente	decreciente	creciente

Sólo falta estudiar los puntos x=0 y x=1, en los que se anula la derivada.[1] Pero para eso necesitamos del siguiente criterio.

2.- Criterio de la derivada segunda

Si $f'(x_0)=0$, f' está definida en un entorno de x_0 y $f''(x_0)\neq 0$, entonces:

a) $f''(x_0)>0$ implica que f tiene un mínimo relativo en x_0.

b) $f''(x_0)<0$ implica que f tiene un máximo relativo en x_0.

* * *

Demostremos,[2] por ejemplo, el primer apartado.

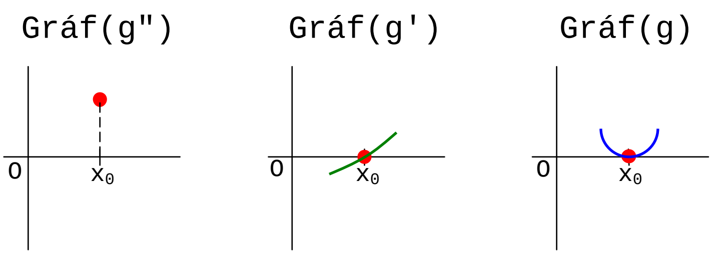
1º) Señalamos en rojo lo que conocemos de la función g y sus derivadas:

- Como $g(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$ Gráf(g).
- Como $g'(x_0)=f'(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$ Gráf(g').
- Como $g''(x_0)=f''(x_0)>0$, $(x_0,f''(x_0))\in$ Gráf(g").

2º) Deducimos el comportamiento de g en x_0:

• Como $g''(x_0)>0$, podemos[3] dibujar (verde) la gráfica de g', pues sabemos[4] que es creciente en x_0.

• Como g' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de x_0, g decrece a la izquierda y crece a la derecha de de dicho punto; y como es continua[5] en x_0 (por ser derivable en él), podemos dibujar su gráfica (azul) en un entorno de x_0.



CONCLUSIÓN: la función g tiene un mínimo relativo[6] en x_0. Por tanto, f también.

* * *

[1] Llamados *puntos singulares o críticos* de la función.
[2] Puedes intentarlo por tu cuenta. Basta que hagas los casos 3) y 4) del EJERCICIO 4 contenido en *Ejercicio 6.1*.
[3] Como f' está definida en un entorno de x_0, g' también, ya que g'=f'.
[4] Por el criterio de la derivada primera (g" es la derivada primera de g').
[5] Si g no fuese continua en x_0, nada se podría concluir, como lo muestra el EJERCICIO 2 contenido en *Ejercicio 6.1*.
[6] Observa que, como $g'(x_0)=0$, el eje de abscisas es la tangente a la gráfica de g en x_0.

Prosigamos el análisis de la función $f(x)=4x^5-5x^4$. Nos faltaba estudiar los puntos x=0 y x=1. Veamos cuál es el valor de la derivada segunda en dichos puntos:

Derivadas	x=0	x=1
$f''(x)=80x^3-60x^2$	0	20

Por tanto, la función tiene un mínimo relativo en x=1 que vale f(1)=-1. Sin embargo, nada podemos concluir todavía de lo que sucede en x=0. Para poderlo hacer, necesitamos dar un paso más,[1] que consiste en generalizar los dos criterios que acabamos de ver.

3.- Criterio de la derivada enésima

Siempre que $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n-1)}$ esté definida en un entorno de x_0 y $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, se puede afirmar lo siguiente:[2]

a) Si n es impar, entonces f es monótona en x_0: monótona creciente cuando $f^{(n)}(x_0)>0$ y monótona decreciente cuando $f^{(n)}(x_0)<0$.

b) Si n es par, entonces f tiene un extremo relativo en x_0: mínimo relativo cuando $f^{(n)}(x_0)>0$ y máximo relativo cuando $f^{(n)}(x_0)<0$.

* * *

En efecto, si analizas los resultados que has obtenido en el EJERCICIO 4 que se indica en la nota 1, observarás lo siguiente:[3]

$$f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow g^{(n-1)} \text{ crece en } x_0 \Rightarrow g^{(n-2)} \text{ mínimo en } x_0 \stackrel{4}{\Rightarrow} \ldots$$

Por tanto, la función $g=g^{(0)}=g^{(n-n)}$ crece en x_0 si n es impar, y tiene un mínimo en x_0 si n es par.

Del mismo modo se razona cuando $f^{(n)}(x_0)<0$.

* * *

Ya podemos terminar el análisis de la función $f(x)=4x^5-5x^4$. Nos faltaba estudiar el punto x=0, ya que en él se anulaban las derivadas primera y segunda. Calculemos las siguientes hasta que demos con la primera que no se anula en dicho punto:

Derivadas	x=0
$f'''(x)=240x^2-120x$	0
$f^{(4)}(x)=480x-120$	-120

[1] Pero antes de dar ese paso conviene que hagas los casos 5), 6), 7) y 8) del EJERCICIO 4 contenido en *Ejercicio 6.1*.
[2] Si recuerdas los enunciados de los dos criterios anteriores, recordar éste no requiere mayor esfuerzo; ya que si n es *impar*, sucede lo mismo que en el criterio de la derivada *primera*; y si es *par*, lo mismo que en el criterio de la derivada *segunda*.
[3] El enunciado del criterio de la derivada enésima recoge estos resultados, pero agrupados de otro modo.
[4] Repitiéndose alternativamente ambos resultados.

Como $f^{(4)}(0)<0$, f tiene un máximo relativo en x=0 que vale f(0)=0.

Por tanto:

x	y	Clasificación
0	0	Máximo
1	-1	Mínimo

* * *

Veamos otro ejemplo. Analicemos la monotonía y los extremos de la función $f(x)=3x^4-8x^3$.

Tenemos que estudiar el signo de $f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$:

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
f' es	-	-	+
f es	decreciente	decreciente	creciente

Sólo nos queda por averiguar lo que sucede en los puntos x=0 y x=2, en los que se anula la derivada:

Derivadas	x=0	x=2
$f''(x)=36x^2-48x$	0	48
$f'''(x)=72x-48$	-48	

Como $f''(2)>0$, f tiene un mínimo relativo en x=2 que vale f(2)=-16.

Como $f'''(0)<0$, f es decreciente en x=0.

En resumen:[1]

Intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
f es	decreciente	creciente

x	y	Clasificación
2	-16	Mínimo

* * *

Veamos un ejemplo más. Analicemos la monotonía y los extremos de la función $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Tenemos que averiguar el signo de $f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$:

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
f' es	+	-	-	+
f es	creciente	decreciente	decreciente	creciente

Como x=1 no pertenece al dominio de la función,[2] sólo nos quedan por estudiar los puntos x=0 y x=2:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

[1] Observa que, al ser la función decreciente en x=0, hemos reducido el número de intervalos que aparecen al estudiar la monotonía de la función.

[2] Hay que tener especial cuidado con este tipo de puntos. Aunque en ellos no está definida la función, hay que tenerlos en cuenta a la hora de estudiar el signo de la derivada.

Derivadas	x=0	x=2
$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$	-2	2

Como $f''(0)<0$, f tiene un máximo relativo en x=0 que vale $f(0)=0$.
Como $f''(2)>0$, f tiene un mínimo relativo en x=2 que vale $f(2)=4$.
Por tanto:

x	y	Clasificación
0	0	Máximo
2	4	Mínimo

4.- Problemas

1) Mediante el criterio de la derivada enésima, estudia el comportamiento en x=0 de las siguientes funciones:

- **a)** $y=-2x^2$
- **b)** $y=-6x^3$
- **c)** $y=(x^2-1)(x^2+3)$
- **d)** $y=\operatorname{sen} x-x$
- **e)** $y=e^{-x}$
- **f)** $y=\operatorname{arc\,tg}(x^2-1)$
- **g)** $y=e^{x^2}$
- **h)** $y=\sqrt{x^4+x^2+1}$
- **i)** $y=\ln(x^2+1)$
- **j)** $y=\operatorname{arc\,sen} x$
- **k)** $y=\operatorname{sen}(2x+4)$
- **l)** $y=\sqrt[3]{x}$

2) Estudia la monotonía y los extremos de las funciones:

- **a)** $y=x^2-6x+8$
- **b)** $y=6x^3-8x$
- **c)** $y=\frac{x+1}{x-1}$
- **d)** $y=\frac{2x+4}{3x-1}$
- **e)** $y=4^x$
- **f)** $y=\cos x+x$
- **g)** $y=\ln x$
- **h)** $y=\frac{1}{x^2}$
- **i)** $y=\operatorname{sen} x-\cos x$ [1]
- **j)** $y=x^2+3x$
- **k)** $y=\frac{x}{x^2-1}$
- **l)** $y=x^3+x^2-x$
- **m)** $y=\frac{x}{\ln x}$
- **n)** $y=x^4-8x^2+3$
- **o)** $y=x^3-3x^2-9x+5$
- **p)** $y=x^2\cdot e^x$
- **q)** $y=2x^2-4x+1$
- **r)** $y=\frac{x}{x^2+1}$
- **s)** $y=\frac{2x^2}{x-3}$
- **t)** $y=x\cdot\ln x$
- **u)** $y=3x^3+4x-1$

3) Estudia la monotonía y los extremos de las funciones:

- **a)** $y=(x+4)\cdot\sqrt[3]{x}$
- **b)** $y=e^x/x$
- **c)** $y=\frac{|x-4|}{x^2}$
- **d)** $y=\sqrt{|x|}-1$
- **e)** $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$
- **f)** $y=|x^2+2x|$

4) Halla las coordenadas del vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$.

[1] Estudiarla sólo en el intervalo $(0,2\pi)$.