

15 de octubre de 2010.

1) (3p) Define:

a) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 3$.

b) Infinitésimo.

c) Función continua en un punto.

2) (1,6p) Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(e^x - 1)}{e^{2x} - 1}$$

3) (1,8p) Halla la ecuación de la asíntota que la siguiente función tiene en $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} - 2x$$

4) (1,8p) Halla el dominio y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x^2}$$

5) (1,8p) Dada la función $f(x) = x - 1 + \sqrt{\ln(x+1)}$, prueba que existe α en el intervalo $(0, e-1)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Ejercicio 2: Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:

$$f(x) = \frac{\text{sen}(e^x - 1)}{e^{2x} - 1} \quad (1,6 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(e^x - 1)}{e^{2x} - 1} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(e^x - 1)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e^{2x} - 1} \cdot \text{sen}(e^x - 1) \right] = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{e^{+\infty} - 1} = \frac{1}{+\infty - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $-1 \leq \text{sen}(e^x - 1) \leq 1$

¹ Ya que $\text{sen}f \sim f$ si f es un infinitésimo.

² Ya que $e^f - 1 \sim f$ si f es un infinitésimo. También puede hacerse simplificando la expresión después de descomponer el denominador en factores.

Ejercicio 3: Halla la ecuación de la asíntota que la siguiente función tiene en $+\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} - 2x$$

* * *

(1,8 PUNTOS)

Solución:

La recta $y = -x - 2$ es la asíntota oblicua de la función en $+\infty$:

- $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - 2x) \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} - 2 \right) \right] =$
 $= +\infty \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{4}{+\infty}} - 2 \right) = +\infty \cdot (\sqrt{1 - 0} - 2) = +\infty \cdot (1 - 2) = +\infty \cdot (-1) = -\infty$
- $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x} - 2x}{x} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} - 2 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} - 2 \right) =$
 $= \sqrt{1 - \frac{4}{+\infty}} - 2 = \sqrt{1 - 0} - 2 = 1 - 2 = -1$
- $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - 2x + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - x) \stackrel{3}{=}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} \stackrel{4}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1} =$
 $= \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{+\infty}} + 1} = \frac{-4}{\sqrt{1 - 0} + 1} = \frac{-4}{1 + 1} = \frac{-4}{2} = -2$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \sqrt{x^2 - 4x} - 2x + x + 2 = \sqrt{x^2 - 4x} - (x - 2) \stackrel{5}{=} \sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el sustraendo es mayor que el minuendo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

¹ Sacamos x factor común.

² Sacamos x factor común en el numerador.

³ Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

⁴ Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.

⁵ Ya que, en $+\infty$, como $x - 2 > 0$, $x - 2 = |x - 2| = \sqrt{(x - 2)^2}$.

Ejercicio 4: Halla el dominio y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x^2}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f) = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$:

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \ln x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a \in \text{Dom}(f)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+x)}{\ln x^2} \stackrel{1}{=} \frac{\ln(1+a)}{\ln a^2} = f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln x^2} \stackrel{1}{=} \frac{\ln 1}{\ln 0^+} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

4º) La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=1$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\ln(1+x)}{\ln x^2} \stackrel{1}{=} \frac{\ln 2}{\ln 1^-} = \frac{\ln 2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\ln(1+x)}{\ln x^2} \stackrel{1}{=} \frac{\ln 2}{\ln 1^+} = \frac{\ln 2}{0^+} = +\infty$$

¹ Para calcular el límite del numerador y el límite del denominador aplicamos la regla del límite de la composición.

Ejercicio 5: Dada la función $f(x)=x-1+\sqrt{\ln(x+1)}$, demuestra que existe $\alpha \in (0, e-1)$ tal que $f(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la función f satisface las condiciones del **teorema de Bolzano**, existe $\alpha \in (0, e-1)$ tal que $f(\alpha)=0$.

En efecto:

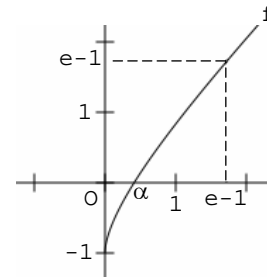
1ª) $f(0) \cdot f(e-1) < 0$:

- $f(0) = -1 + \sqrt{\ln 1} = -1 + 0 = -1 < 0$
- $f(e-1) = e-1-1 + \sqrt{\ln e} = e-2+1 = e-1 > 0$

2ª) f es continua en $[0, e-1]$:

- $[0, e-1] \subset \text{Dom}(f) \stackrel{1}{=} [0, +\infty)$.
- Si $a \in [0, e-1]$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [x-1 + \sqrt{\ln(x+1)}] \stackrel{2}{=} a-1 + \sqrt{\ln(a+1)} = f(a)$$



¹ $\ln(x+1) \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$.

² Para calcular el límite del radicando aplicamos la regla del límite de la composición.