1) (2p) Define:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-5$.

b) Asíntota oblicua en $+\infty$.

2) (1p) Enuncia el teorema de Bolzano.

3) (1,8p) Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}\cdot \operatorname{sen}\frac{x-1}{x^2}$$

4) (1,7p) Halla las ecuaciones de las asíntotas verticales de la siguiente función y estudia su posición relativa:

$$f(x)=\ln\frac{x-1}{x^2}$$

5) (1,8p) Estudia el comportamiento en $-\infty$ de la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$$

6) (1,7p) Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=(2-\cos x)^{1/x^2}$$

Ejercicio 3: *Calcula los límites en 0 y en $+\infty$ de la función:*

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}\cdot sen\frac{x-1}{x^2}$$ *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}\cdot sen\frac{x-1}{x^2}\right)=0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-1}=\frac{0}{0-1}=0$
- $-1\le sen\frac{x-1}{x^2}\le 1$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}\cdot sen\frac{x-1}{x^2}\right)\overset{1}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

Evidentemente, el argumento del seno es un infinitésimo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

1 Ya que $sen f\sim f$ si f es un infinitésimo.

2 Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n\sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación.

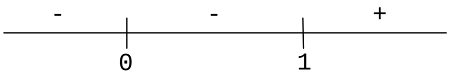
Ejercicio 4: *Halla las ecuaciones de las asíntotas verticales de la siguiente función y estudia su posición relativa:*

$$f(x)=\ln\frac{x-1}{x^2}$$ *(1,7 PUNTOS)*

* * *

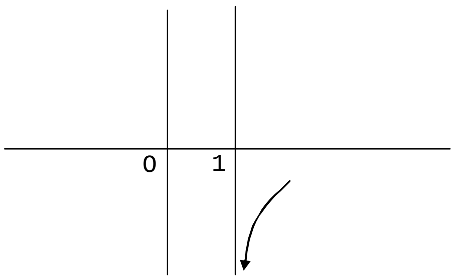
Solución:

1º) Dom(f)=(1,+∞), ya que el signo del argumento del logaritmo es el siguiente:



2º) La recta x=1 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln\frac{x-1}{x^2} \stackrel{1}{=} \ln\frac{0^+}{1}=\ln 0^+=-\infty$$



1 Aplicamos la regla del límite de la composición.

Ejercicio 5: *Estudia el comportamiento en $-\infty$ de la función:*

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

La recta y=-2 es asíntota horizontal de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}\overset{1}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{-x}\overset{2}{=}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{4+\frac{1}{+\infty}}=-\sqrt{4+0}=-2$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}+2=\frac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{x}\overset{3}{=}\frac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2}}{x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

---

1 Ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ cuando $x<0$.

2 Por las propiedades de los límites.

3 Ya que, en $-\infty$, como $x<0$, $\sqrt{x^2}=|x|=-x$. Por tanto, $2x=\sqrt{4}\cdot(-\sqrt{x^2})=-\sqrt{4x^2}$.

Ejercicio 6: *Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=(2-\cos x)^{1/x^2}$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$:

$$\begin{cases}2-\cos x>0\\ x\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos x<2\\ x\neq 0\end{cases} \Rightarrow x\neq 0$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a\in\mathrm{Dom}(f)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(2-\cos x)^{1/x^2} = (2-\cos a)^{1/a^2} = f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en x=0:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(2-\cos x)^{1/x^2} \overset{1}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\cdot(2-\cos x-1)\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} \overset{2}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

---

1 Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞.

2 Ya que, en x=0, $1-\cos x \sim x^2/2$. También puede multiplicarse numerador y denominador por el conjugado del numerador y tener luego en cuenta que, en x=0, $\operatorname{sen} x \sim x$.