

28 de octubre de 2004.

1) (2p) Defina los siguientes conceptos:

a) Límite de una función en un punto.

b) Función continua en un punto.

2) (1p) Enuncia el teorema de Bolzano.

3) (2p) Halla los límites en 0 y en $+\infty$ de la siguiente función:

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln x$$

4) (1p) Demuestra que la ecuación $x + \cos x = 2$ tiene una solución en el intervalo $(2,3)$ y calcúlala con un error menor que media décima.

5) (1p) Halla a y b para que la siguiente función sea continua en $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 4ax + 10}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq -1 \\ b & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

6) (2p) Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$.

7) (1p) Halla k para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + kx + 1} + x) = 2$$

Ejercicio 3: Halla los límites en 0 y en $+\infty$ de la siguiente función:

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln x$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [\ln(1+x) - \ln x] \stackrel{2}{=} \ln 1 - \ln 0^+ = 0 - (-\infty) = +\infty$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1+x) - \ln x] \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{x} \stackrel{4}{=} \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} \stackrel{5}{=} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

¹ Ya que $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$.

² Para calcular el límite del minuendo aplicamos la regla del límite de la composición.

³ Por las propiedades de los logaritmos.

⁴ Aplicamos la regla del límite de la composición.

⁵ Ya que $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \sim a_n \cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación.

Ejercicio 4: Demuestra que la ecuación $x + \cos x = 2$ tiene una solución en el intervalo $(2,3)$ y calcúlala con un error menor que media décima.

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Consideramos la función $f(x) = x + \cos x - 2$.

Esta función es continua en \mathbb{R} , ya que si $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [x + \cos x - 2] = a + \cos a - 2 = f(a)$$

Como $f(2) = \cos 2 < 0$ y $f(3) = 1 - \cos 3 > 0$,¹ estudiamos el signo de la función en valores intermedios hasta dar con un intervalo de una décima de longitud en cuyos extremos la función tenga signos distintos:

x	2	3	2,5	2,8	2,9
y	-	+	-	-	-

Como f es continua en $[2,9;3]$ y $f(2,9) \cdot f(3) < 0$, por el teorema de Bolzano existe c en $(2,9;3)$ tal que $f(c) = 0$.

Ahora bien:

$$f(c) = 0 \Rightarrow c + \cos c - 2 = 0 \Rightarrow c + \cos c = 2$$

En consecuencia, c es solución de la ecuación. Y como $c \in (2,9;3)$, una solución aproximada con un error menor que 0,05 es, evidentemente, 2,95.

¹ Como el ángulo de las funciones trigonométricas viene dado en radianes, hay que calcular estos valores con la calculadora puesta en esa unidad.

Ejercicio 5: Halla a y b para que la siguiente función sea continua en $x=-1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+4ax+10}{x^2-1} & \text{si } x \neq -1 \\ b & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

El límite de la función f en -1 debe coincidir con $f(-1)$:

- $f(-1)=b$

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+4ax+10}{x^2-1} = \frac{2-4a+10}{0} \stackrel{1}{\Rightarrow} 2-4a+10=0 \Rightarrow 4a=12 \Rightarrow a=3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+12x+10}{x^2-1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+5)}{x-1} = \frac{8}{-2} = -4$$

Por tanto, $a=3$ y $b=-4$.

¹ Si $2-4a+10 \neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es continua en $x=-1$.

² Factorizamos numerador y denominador.

Ejercicio 6: Calcula las asíntotas de la función $f(x)=\text{sen}x/\ln x$.

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f)=(0,1)\cup(1,+\infty)$:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

2º) La recta $x=0$ no es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\text{sen } x}{\ln x} = \frac{\text{sen } 0}{\ln 0^+} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

3º) La recta $x=1$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\text{sen } x}{\ln x} = \frac{\text{sen } 1}{\ln 1^-} = \frac{\text{sen } 1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\text{sen } x}{\ln x} = \frac{\text{sen } 1}{\ln 1^+} = \frac{\text{sen } 1}{0^+} = +\infty$$

4º) La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \cdot \text{sen } x \right) = 0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$

Ejercicio 7: Halla k para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + kx + 1} + x) = 2$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + kx + 1} + x) &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - kx + 1} - x) \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - kx + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - kx + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-kx + 1}{\sqrt{x^2 - kx + 1} + x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(-k + \frac{1}{x}\right)}{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{k}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-k + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{k}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \\ &= \frac{-k + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0 + 1}} = \frac{-k}{2} = 2 \Rightarrow k = -4 \end{aligned}$$

¹ Ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ cuando $x < 0$.

² Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

³ Sacamos x factor común en numerador y denominador. También puede hacerse dividiendo directamente numerador y denominador por x .