

25 de octubre de 2001.

1) (4p) Defina los siguientes conceptos:

- a) Límite de una función en $+\infty$.
- b) Asíntota vertical.
- c) Función continua en un punto.
- d) Infinitésimo.

2) (2p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)^{\ln x} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2} \right)^x$$

3) (2p) Estudia las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2+2^x}{1-2^x}$$

4) (2p) Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ \frac{3x-10}{(x-3)^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)^{\ln x} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2} \right)^x \qquad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:**a)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)^{\ln x} \stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\operatorname{sen} x)^{\ln x} = 0^{-\infty} = +\infty$$

b) Calculamos primero el límite de la base:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \right) \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \operatorname{sen} x \right) = 1 - 0 = 1$$

Ya que el último paréntesis es el producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

Como la base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2} \right)^x &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\frac{x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2} - 1 \right) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{x^2 - \operatorname{sen} x - x^2}{x^2} \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\operatorname{sen} x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} \cdot \operatorname{sen} x \right)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Ya que el último paréntesis es el producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$
- $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

¹ El dominio de esta función está formado por los números positivos (el argumento del logaritmo debe ser positivo) para los que el seno es positivo (la base de las funciones potencial-exponenciales debe ser positiva).

² Por las propiedades de los límites.

Ejercicio 3: Estudia las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2+2^x}{1-2^x}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$:

$$1-2^x \neq 0 \Rightarrow 2^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

2º) La recta $x=0$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2+2^x}{1-2^x} = \frac{2+1}{1-1^-} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2+2^x}{1-2^x} = \frac{2+1}{1-1^+} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

3º) Las rectas $y=2$ e $y=-1$ son asíntotas horizontales de la función en $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+2^x}{1-2^x} = \frac{2+2^{-\infty}}{1-2^{-\infty}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+2^x}{1-2^x} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{2^x} + 1}{\frac{1}{2^x} - 1} = \frac{\frac{2}{2^{+\infty}} + 1}{\frac{1}{2^{+\infty}} - 1} = \frac{\frac{2}{+\infty} + 1}{\frac{1}{+\infty} - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{2+2^x}{1-2^x} - 2 = \frac{2+2^x - 2 + 2 \cdot 2^x}{1-2^x} = \frac{3 \cdot 2^x}{1-2^x}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $-\infty$, ya que numerador y denominador son positivos,² la función se encuentra situada por encima de la asíntota $y=2$.

$$f(x) - y = \frac{2+2^x}{1-2^x} + 1 = \frac{2+2^x+1-2^x}{1-2^x} = \frac{3}{1-2^x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el denominador es negativo,³ la función se encuentra situada por debajo de la asíntota $y=-1$.

¹ Como sale la expresión indeterminada ∞/∞ , dividimos numerador y denominador por 2^x (o, si se prefiere, sacamos 2^x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación).

² Si $x < 0$, $0 < 2^x < 1$.

³ Si $x > 0$, $2^x > 1$.

Ejercicio 4: Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ \frac{3x-10}{(x-3)^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$:

$$x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$$

2º) La función es continua en su dominio:

- Si $a < 2$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-4}{2-x} = \frac{a^2-4}{2-a} = f(a)$
- Si $2 < a \neq 3$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x-10}{(x-3)^2} = \frac{3a-10}{(a-3)^2} = f(a)$
- Si $a = 2$:

$$f(2) = \frac{6-10}{(2-3)^2} = -4$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2-4}{2-x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} [-(x+2)] = -4$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3x-10}{(x-3)^2} = \frac{6-10}{(2-3)^2} = -4$$

3º) La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-10}{(x-3)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$