

1) (4p) Define los siguientes conceptos:

- a)** Asíntota horizontal.
- b)** Límite de una función en un punto.
- c)** Función continua en un punto.
- d)** Elipse.¹

2) (2p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{-1/x^3}$$

3) (1p) Estudia las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3}$$

4) (1p) Halla k para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-k} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

5) (1p) Encuentra, con un error menor que una centésima, la solución de la ecuación $e^x = 1/x$.

6) (1p) Halla la ecuación reducida de la elipse de eje focal el de ordenadas si se sabe que su excentricidad es $3/5$ y que $b=2$.¹

¹ La elipse formaba parte del programa de Matemáticas II en este curso.

Ejercicio 2: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{2-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{sen} x)^{-1/x^3}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:**a)**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{2-x} \stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{\ln(x-2)}{2-x} \stackrel{2}{=} \frac{\ln 0^+}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{sen} x)^{-1/x^3} &\stackrel{3}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{x^3} \cdot (1+\operatorname{sen} x - 1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{x^3}} \stackrel{4}{=} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}} = e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

¹ Ya que el dominio de la función es $(2, +\infty)$.

² Para calcular el límite del numerador aplicamos la regla del límite de la composición.

³ Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞ .

⁴ Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$.

Ejercicio 3: Estudia las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3}$$

* * *

(1 PUNTO)

Solución:

1º) Dom(f) = $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

2º) La función no tiene asíntotas verticales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{16 - x^2 - 7}{(x - 3)(4 + \sqrt{x^2 + 7})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{(x - 3)(4 + \sqrt{x^2 + 7})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x^2 - 9)}{(x - 3)(4 + \sqrt{x^2 + 7})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(4 + \sqrt{x^2 + 7})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x + 3)}{4 + \sqrt{x^2 + 7}} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

3º) Las rectas $y=1$ e $y=-1$ son asíntotas horizontales de la función en $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{-x - 3} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x} - \sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}}{-1 - \frac{3}{x}} = \frac{0 - \sqrt{1 + 0}}{-1 - 0} = \frac{-1}{-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x} - \sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{0 - \sqrt{1 + 0}}{1 - 0} = \frac{-1}{1} = -1 \end{aligned}$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3} - 1 = \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7} - x + 3}{x - 3} = \frac{7 - x - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3} \stackrel{4}{=} \frac{\sqrt{x^2 - 14x + 49} - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo,⁵ la función se encuentra situada por debajo de la asíntota $y=1$.

$$f(x) - y = \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3} + 1 = \frac{4 - \sqrt{x^2 + 7} + x - 3}{x - 3} = \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3} \stackrel{6}{=} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 7}}{x - 3}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $+\infty$, ya que numerador y denominador son positivos,⁷ la función se encuentra situada por encima de la asíntota $y=-1$.

¹ Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador.

² Ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ cuando $x < 0$.

³ Dividimos numerador y denominador por x (o, si se prefiere, sacamos x factor común en numerador y denominador, simplificando a continuación).

⁴ Ya que, en $-\infty$, como $7 - x > 0$, $7 - x = |7 - x| = \sqrt{(7 - x)^2}$.

⁵ Si $x < 0$, $-14x + 49 > 7$.

⁶ Ya que, en $+\infty$, como $x + 1 > 0$, $x + 1 = |x + 1| = \sqrt{(x + 1)^2}$.

⁷ Si $x > 3$, $2x + 1 > 7$.

Ejercicio 4: Halla k para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-k} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

Para que la función sea continua es necesario que lo sea en $x=1$:

- $f(1) = |1| = 1$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} |x| = |1| = 1$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} e^{x-k} = e^{1-k}$

Por tanto:

$$e^{1-k} = 1 \Rightarrow 1-k=0 \Rightarrow k=1$$

Ejercicio 5: Encuentra, con un error menor que una centésima, la solución de la ecuación $e^x=1/x$. (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Consideramos la función $f(x)=e^x-1/x$.

La función es continua en su dominio, ya que si $a \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [e^x - 1/x] = e^a - 1/a = f(a)$$

Como $f(0,5)=\sqrt{e}-2 \approx -0,35 < 0$ y $f(1)=e-1 \approx 1,72 > 0$, estudiamos el signo de la función en valores intermedios hasta dar con un intervalo de una centésima de longitud en cuyos extremos la función tenga signos distintos:

x	0,5	1	0,6	0,55	0,56	0,57
y	-	+	+	-	-	+

Como f es continua en $[0,56;0,57]$ y $f(0,56) \cdot f(0,57) < 0$, por el teorema de Bolzano existe c en $(0,56;0,57)$ tal que $f(c)=0$.

Ahora bien:

$$f(c)=0 \Rightarrow e^c - 1/c = 0 \Rightarrow e^c = 1/c$$

En consecuencia, c es solución de la ecuación. Y como c pertenece al intervalo $(0,56;0,57)$, una solución aproximada con un error menor que una centésima es, por ejemplo, 0,56.

Ejercicio 6: Halla la ecuación reducida de la elipse de eje focal el de ordenadas si se sabe que su excentricidad es $3/5$ y que $b=2$. (1 PUNTO)

* * *

Solución:

La ecuación reducida de una elipse de eje focal el eje de ordenadas es:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Como $b=2$, queda:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{4} = 1$$

Como $e=3/5$ y $a^2=b^2+c^2$:

$$\begin{cases} c/a=3/5 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3a/5 \\ a^2=4+c^2 \end{cases} \Rightarrow a^2=4+\frac{9a^2}{25} \Rightarrow 25a^2=100+9a^2 \Rightarrow 16a^2=100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{100}{16} \Rightarrow a=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow c=\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2}=\frac{3}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25/4} + \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{4y^2}{25} + \frac{x^2}{4} = 1$$