

25 de enero de 2011.

1) (1p) Define:

a) Primitiva de una función.

b) Integral indefinida de una función.

2) (1p) Enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo integral.

3) (1p) Enuncia y demuestra la regla de Barrow.

4) (2,6p) Halla:

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot dx$$

$$\int x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

5) (2,6p) Calcula:

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+17} \cdot dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+15} \cdot dx$$

6) (1,8p) Halla el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x)=(x^2-1)/e^x$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 4: Halla:

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot dx$$

$$\int x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

(2,6 PUNTOS)

* * *

Solución:**a)**

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot dx \stackrel{1}{=} \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{sen} x^2 \cdot (2x) \cdot dx \stackrel{2}{=} -\frac{1}{2} \cdot \cos x^2 + C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2} \cdot \cos x^2\right)' = -\frac{1}{2} \cdot (-\operatorname{sen} x^2) \cdot 2x = x \cdot \operatorname{sen} x^2$$

b)

$$\int x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx \stackrel{3}{=} -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cdot \cos x + C = 2x \cdot \operatorname{sen} x + (2-x^2) \cdot \cos x + C$$

S	D	I
+	x^2	$\operatorname{sen} x$
-	$2x$	$-\cos x$
+	2	$-\operatorname{sen} x$
-	0	$\cos x$

Comprobación:

$$[2x \cdot \operatorname{sen} x + (2-x^2) \cdot \cos x]' =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2x \cdot \cos x - (2-x^2) \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \cdot (2-2+x^2) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$$

¹ Multiplicamos y dividimos por 2.

² Se trata de una integral casi inmediata de tipo coseno. Se puede hacer también por el cambio de variable $x^2=t$, $2x \cdot dx=dt$.

³ Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son inmediatas de tipo seno y coseno.

Ejercicio 5: Calcula:

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+17} \cdot dx \qquad \int \frac{x+1}{x^2-8x+15} \cdot dx \qquad (2,6 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

a) Como se trata de una integral racional (cociente de polinomios), calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-8x+17=0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-68}}{2} \Rightarrow \text{No tiene raíces reales}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-8x+17} \cdot dx &\stackrel{1}{=} \int \frac{x+1}{(x-4)^2+1^2} \cdot dx \stackrel{2}{=} \int \frac{4+t+1}{t^2+1} \cdot dt = \int \frac{5+t}{1+t^2} \cdot dt = \\ &= \int \left(\frac{5}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2} \right) \cdot dt = \int \frac{5}{1+t^2} \cdot dt + \int \frac{t}{1+t^2} \cdot dt = 5 \cdot \int \frac{1}{1+t^2} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot dt \stackrel{3}{=} \\ &= 5 \cdot \arctg t + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+t^2) + C \stackrel{4}{=} 5 \cdot \arctg(x-4) + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2-8x+17) + C = \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left(5 \cdot \arctg(x-4) + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2-8x+17) \right)' &= 5 \cdot \frac{1}{1+(x-4)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-8}{x^2-8x+17} = \\ &= \frac{5}{x^2-8x+17} + \frac{x-4}{x^2-8x+17} = \frac{x+1}{x^2-8x+17} \end{aligned}$$

b) Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-8x+15=0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=3 \end{cases}$$

Por tanto:⁵

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2-8x+15} &= \frac{x+1}{(x-5)(x-3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-5)}{(x-5)(x-3)} \Rightarrow \\ \Rightarrow x+1 &= A(x-3)+B(x-5) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=3 \Rightarrow 4=-2B \Rightarrow B=-2 \\ \text{Si } x=5 \Rightarrow 6=2A \Rightarrow A=3 \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia:

¹ Como el polinomio $x^2-8x+17$ no tiene raíces reales, lo escribimos como una suma de cuadrados: $x^2-8x+17=(x-4)^2-16+17=(x-4)^2+1^2$.

² Hacemos el cambio $x-4=t \Rightarrow x=4+t, dx=dt$.

³ La primera integral es inmediata de tipo arco tangente y la segunda, casi inmediata de tipo logaritmo. Esta última puede hacerse también con el cambio $1+t^2=z, 2t \cdot dt=dz$.

⁴ Deshacemos el cambio.

⁵ Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{x+1}{x^2-8x+15} \cdot dx = \int \frac{3}{x-5} \cdot dx + \int \frac{-2}{x-3} \cdot dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x-5} \cdot dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x-3} \cdot dx \stackrel{1}{=} \\ = 3 \cdot \ln|x-5| - 2 \cdot \ln|x-3| + C$$

Comprobación:

$$(3 \cdot \ln|x-5| - 2 \cdot \ln|x-3|)' = 3 \cdot \frac{1}{x-5} - 2 \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x-3} = \\ = \frac{3(x-3) - 2(x-5)}{x^2-8x+15} = \frac{3x-9-2x+10}{x^2-8x+15} = \frac{x+1}{x^2-8x+15}$$

¹ Se trata de integrales casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos

Ejercicio 6: Halla el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $f(x)=(x^2-1)/e^x$ y el eje de abscisas. (1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=(x^2-1)/e^x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2-1}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

2º) Averiguamos entre -1 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

$$\begin{array}{c|c|c} x & Y_1 & Y_2 \\ \hline 0 & -1 & 0 \end{array}$$

3º) Calculamos el área:

$$A = \int_{-1}^1 \left(0 - \frac{x^2-1}{e^x} \right) \cdot dx = \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{e^x} \stackrel{1}{=} \left[\frac{(x+1)^2}{e^x} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{e} - 0 = \frac{4}{e}$$

* * *

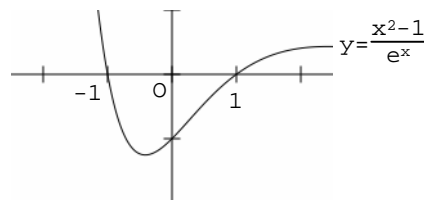
$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^2}{e^x} \cdot dx &= \int (1-x^2) \cdot e^{-x} \cdot dx \stackrel{2}{=} -(1-x^2) \cdot e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{-x} + C = \\ &= e^{-x} \cdot (-1+x^2+2x+2) + C = (x^2+2x+1) \cdot e^{-x} + C = (x+1)^2 \cdot e^{-x} + C = \frac{(x+1)^2}{e^x} + C \end{aligned}$$

S	D	I
+	$1-x^2$	e^{-x}
-	$-2x$	$-e^{-x}$
+	-2	e^{-x}
-	0	$-e^{-x}$

Comprobación:

$$\left(\frac{(x+1)^2}{e^x} \right)' = \frac{2(x+1) \cdot e^x - (x+1)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (2x+2-x^2-2x-1)}{e^{2x}} = \frac{1-x^2}{e^x}$$

Representación gráfica:



¹ La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

² Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son casi inmediatas de tipo exponencial.