30 de enero de 2009.

1) (1,5p) Define los siguientes conceptos:

a) Función integral de una función.

b) Primitiva de una función.

c) Integral indefinida de una función.

2) (1,5p) Enuncia y demuestra la regla de Barrow.

3) (1,4p) Halla f(x) si su gráfica pasa por el punto P(0,1) y su derivada es $f'(x)=3\cdot \operatorname{sen} x\cdot \cos^2 x$.

4) (1,4p) Halla:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}\,dx$$

5) (1,4p) Calcula:

$$\int \frac{1}{x^2-x^3}\cdot dx$$

6) (1,4p) Halla:

$$\int \sqrt{e^x-1}\cdot dx$$

7) (1,4p) Calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$.

Ejercicio 3: *Halla $f(x)$ si su gráfica pasa por el punto $P(0,1)$ y su derivada es $f'(x)=3\cdot \operatorname{sen} x\cdot \cos^2 x$.* *(1,4 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Como la función f es una primitiva de f':

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int 3\cdot \operatorname{sen} x\cdot \cos^2 x\cdot dx=$$

$$=-3\cdot\int \cos^2 x\cdot(-\operatorname{sen} x)\cdot dx \overset{1}{=} -3\cdot\frac{\cos^3 x}{3}+C=-\cos^3 x+C$$

Como el punto P pertenece a la gráfica de f:

$$f(0)=1 \Rightarrow -\cos^3 0+C=1 \Rightarrow -1+C=1 \Rightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=2-\cos^3 x$$

[1] Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $\cos x=t$, $-\operatorname{sen} x\cdot dx=dt$. O por partes.

Ejercicio 4: Halla:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}\,dx$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}\,dx \overset{1}{=} \left[-\frac{1+2\cdot\ln x}{4x^2}\right]_1^2 = -\frac{1+2\cdot\ln 2}{16} + \frac{1+2\cdot\ln 1}{4} = \frac{-1-\ln 4+4}{16} = \frac{3-\ln 4}{16}$$

* * *

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\cdot dx = \int x^{-3}\cdot\ln x\cdot dx \overset{2}{=} \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\cdot\int x^{-3}\cdot dx \overset{3}{=} \frac{-\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1} =$$

$$= \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = \frac{-1-2\cdot\ln x}{4x^2} + C = -\frac{1+2\cdot\ln x}{4x^2} + C$$

S	D	I
+	$\ln x$	x^{-3}
-	$\frac{1}{x}$	$\frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{-1}{2x^2}$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1+2\cdot\ln x}{4x^2}\right)' = -\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot 4x^2 - (1+2\cdot\ln x)\cdot 8x}{16x^4} = -\frac{8x-8x-16x\cdot\ln x}{16x^4} = \frac{16x\cdot\ln x}{16x^4} = \frac{\ln x}{x^3}$$

1 La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

2 Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

3 Se trata de una integral inmediata de tipo potencial.

Ejercicio 5: Calcula:

$$\int \frac{1}{x^2-x^3}\cdot dx$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-x^3=0 \Rightarrow x^2(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ doble} \\ x=1 \end{cases}$$

Por tanto:[1]

$$\frac{1}{x^2-x^3}=\frac{1}{x^2(1-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{1-x}=\frac{Ax(1-x)+B(1-x)+Cx^2}{x^2(1-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=Ax(1-x)+B(1-x)+Cx^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x=0 \Rightarrow 1=B \\ \text{si } x=1 \Rightarrow 1=C \\ \text{si } x=-1 \Rightarrow 1=-2A+2B+C \overset{2}{\Rightarrow} 2A=-1+2+1 \Rightarrow A=1 \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$\int \frac{1}{x^2-x^3}\cdot dx=\int \frac{1}{x}\cdot dx+\int \frac{1}{x^2}\cdot dx+\int \frac{1}{1-x}\cdot dx=\int \frac{1}{x}\cdot dx+\int x^{-2}\cdot dx-\int \frac{1}{x-1}\cdot dx \overset{3}{=}$$

$$=\ln|x|+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\ln|x-1|+C=-\frac{1}{x}+\ln|x|-\ln|x-1|+C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{x}+\ln|x|-\ln|x-1|\right)'=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=$$

$$=\frac{1-x+x(1-x)+x^2}{x^2(1-x)}=\frac{1-x+x-x^2+x^2}{x^2-x^3}=\frac{1}{x^2-x^3}$$

---

1 Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

2 Ya que B=1 y C=1.

3 La primera integral es inmediata de tipo logaritmo, la segunda, inmediata de tipo potencial y la tercera, casi inmediata de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final reduciendo el número de sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 6: Halla:

$$\int\sqrt{e^x-1}\cdot dx \qquad \text{(1,4 PUNTOS)}$$

* * *

Solución:

Para eliminar la raíz, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$e^x-1=t^2 \Rightarrow e^x\cdot dx=2t\cdot dt \Rightarrow dx=\frac{2t\cdot dt}{t^2+1}$$

$$\int\sqrt{e^x-1}\cdot dx=\int t\cdot\frac{2t\cdot dt}{t^2+1}=2\cdot\int\frac{t^2}{t^2+1}\cdot dt \overset{1}{=} 2\cdot\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\cdot dt=2\cdot\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)\cdot dt=$$

$$=2\cdot\int 1\cdot dt-2\cdot\int\frac{1}{t^2+1}\cdot dt \overset{2}{=} 2t-2\cdot\operatorname{arc\,tg} t+C \overset{3}{=} 2\cdot\sqrt{e^x-1}-2\cdot\operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^x-1}+C$$

---

[1] Sumamos y restamos 1 al numerador. Se obtiene el mismo resultado haciendo la división de t^2 entre t^2+1.

[2] La primera integral es inmediata de tipo potencial y la segunda, inmediata de tipo arco tangente.

[3] Deshacemos el cambio.

Ejercicio 7: *Calcula el área del recinto limitado por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$.* *(1,4 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x\cdot(x^3-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3=1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

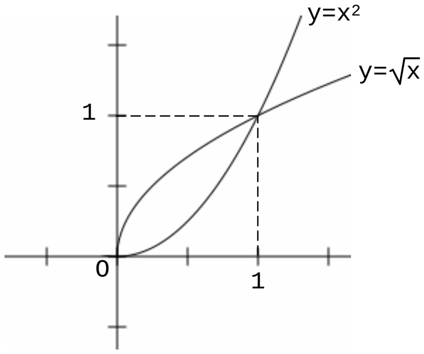
x	y_1	y_2
1/2	1/4=0,25	$\sqrt{1/2}\simeq 0,7$

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\cdot dx=\int_0^1(x^{1/2}-x^2)\cdot dx \overset{1}{=}$$

$$=\left[\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[\frac{2\cdot x^{3/2}}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-0=1/3$$

Representación gráfica:



[1] Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.