

18 de febrero de 2005.

1) (2p) Define los siguientes conceptos:

- a) Integral definida de una función.
- b) Primitiva de una función.
- c) Integral indefinida de una función.
- d) Función integral.

2) (1p) Enuncia:

- a) El teorema fundamental del cálculo integral.
- b) La regla de Barrow.

3) (4,2p) Halla las siguientes integrales:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2-1} \cdot dx$$

$$\int \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2} \cdot dx$$

4) (1,4p) Calcula:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot dx$$

5) (1,4p) Halla el valor del parámetro positivo k para que el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones  $f(x)=\sqrt{kx}$  y  $g(x)=x^2/k$  sea de 3 unidades cuadradas.

**Ejercicio 3:** Halla las siguientes integrales:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2-1} \cdot dx \qquad \int \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx \qquad \int \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2} \cdot dx \quad (4,2 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

**a)**

$$\int x \cdot \sqrt{x^2-1} \cdot dx \stackrel{1}{=} \frac{1}{2} \cdot \int (x^2-1)^{1/2} \cdot 2x \cdot dx \stackrel{2}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-1)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{3} \cdot (x^2-1)^{3/2} + C$$

Comprobación:

$$\left( \frac{1}{3} \cdot (x^2-1)^{3/2} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2-1)^{1/2} \cdot 2x = x \cdot \sqrt{x^2-1}$$

**b)**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx &= \int x^{1/2} \cdot \ln x \cdot dx \stackrel{3}{=} \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \int x^{1/2} \cdot dx \stackrel{4}{=} \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \ln x - \frac{4}{9} \cdot x^{3/2} + C \end{aligned}$$

S	D	I
+	$\ln x$	$x^{1/2}$
-	$1/x$	$\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \ln x - \frac{4}{9} \cdot x^{3/2} \right)' &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} \cdot \ln x + \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} = \\ &= x^{1/2} \cdot \ln x + \frac{2}{3} \cdot x^{1/2} - \frac{2}{3} \cdot x^{1/2} = \sqrt{x} \cdot \ln x \end{aligned}$$

**c)** Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-4x^2+5x-2 \stackrel{5}{=} (x-2)(x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \text{ doble} \end{cases}$$

Por tanto:<sup>6</sup>

$$\frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{x+1}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

<sup>1</sup> Multiplicamos y dividimos por 2.

<sup>2</sup> Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable  $x^2-1=t^2$ ,  $2x \cdot dx=2t \cdot dt$  ( $\Rightarrow x \cdot dx=t \cdot dt$ ). O  $x^2-1=t$ ,  $2x \cdot dx=dt$ .

<sup>3</sup> Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

<sup>4</sup> Se trata de una integral inmediata de tipo potencial.

<sup>5</sup> Descomponemos el polinomio en factores por Ruffini.

<sup>6</sup> Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=1 \Rightarrow 2 = -C \Rightarrow C = -2 \\ \text{Si } x=2 \Rightarrow 3 = A \\ \text{Si } x=-1 \overset{1}{\Rightarrow} 0 = 12 + 6B + 6 \Rightarrow B = -3 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2} \cdot dx &= \int \frac{3}{x-2} \cdot dx + \int \frac{-3}{x-1} \cdot dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot dx = \\ &= 3 \cdot \int \frac{1}{x-2} \cdot dx - 3 \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx - 2 \cdot \int (x-1)^{-2} \cdot dx \stackrel{2}{=} \\ &= 3 \cdot \ln|x-2| - 3 \cdot \ln|x-1| - 2 \cdot \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C = \\ &= 3 \cdot \ln|x-2| - 3 \cdot \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left( 3 \cdot \ln|x-2| - 3 \cdot \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} \right)' &= 3 \cdot \frac{1}{x-2} - 3 \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)^2 - 3(x-1)(x-2) - 2(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} = \\ &= \frac{3(x^2-2x+1) - 3(x^2-3x+2) - 2(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{3x^2-6x+3-3x^2+9x-6-2x+4}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Ya que A=3 y C=-2.

<sup>2</sup> Las dos primeras integrales son casi inmediatas de tipo logaritmo y la última, casi inmediata de tipo potencial. Si se desea, puede simplificarse el resultado final reduciendo el número de sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 4: Calcula:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot dx$$

(1,4 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot dx \stackrel{1}{=} \left[ -\frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2} = \left( -\frac{\cos^3(\pi/2)}{3} \right) - \left( -\frac{\cos^3 0}{3} \right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

\* \* \*

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{1/\cos^2 x} \cdot dx = \int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = \\ &= -\int \cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x) \cdot dx \stackrel{2}{=} -\frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\left( -\frac{\cos^3 x}{3} \right)' = -\frac{3 \cdot \cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{3} = \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x$$

---

<sup>1</sup> La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

<sup>2</sup> Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable  $\cos x = t$ ,  $-\operatorname{sen} x \cdot dx = dt$ . O por partes.

**Ejercicio 5:** Halla el valor del parámetro positivo  $k$  para que el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones  $f(x)=\sqrt{kx}$  y  $g(x)=x^2/k$  sea de 3 unidades cuadradas. (1,4 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

**1º)** Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\sqrt{kx} \\ y=x^2/k \end{cases} \Rightarrow \sqrt{kx}=x^2/k \Rightarrow kx=x^4/k^2 \Rightarrow k^3x=x^4 \Rightarrow x(x^3-k^3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=k \end{cases}$$

**2º)** Averiguamos entre 0 y  $k$  ( $k$  es positiva) qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	$Y_1$	$Y_2$
$k/2$	$k/\sqrt{2}$	$k/4$

**3º)** Calculamos el área:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^k \left( \sqrt{kx} - \frac{x^2}{k} \right) \cdot dx \stackrel{1}{=} \left[ \frac{2}{3} \cdot \sqrt{k} \cdot x^{3/2} - \frac{1}{3k} \cdot x^3 \right]_0^k \\ &= \left( \frac{2}{3} \cdot \sqrt{k} \cdot k^{3/2} - \frac{1}{3k} \cdot k^3 \right) - \left( \frac{2}{3} \cdot \sqrt{k} \cdot 0 - \frac{1}{3k} \cdot 0 \right) = \frac{2}{3} \cdot k^2 - \frac{1}{3} \cdot k^2 = \frac{1}{3} \cdot k^2 = 3 \Rightarrow k^2=9 \stackrel{2}{\Rightarrow} k=3 \end{aligned}$$

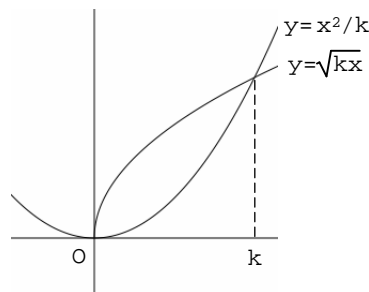
\* \* \*

$$\begin{aligned} \int \left( \sqrt{kx} - \frac{x^2}{k} \right) \cdot dx &= \int \sqrt{kx} \cdot dx - \int \frac{x^2}{k} \cdot dx \stackrel{3}{=} \sqrt{k} \cdot \int x^{1/2} \cdot dx - \frac{1}{k} \cdot \int x^2 \cdot dx \stackrel{3}{=} \\ &= \sqrt{k} \cdot \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{1}{k} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{k} \cdot x^{3/2} - \frac{1}{3k} \cdot x^3 + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\left( \frac{2}{3} \cdot \sqrt{k} \cdot x^{3/2} - \frac{1}{3k} \cdot x^3 \right)' = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{k} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} - \frac{1}{3k} \cdot 3x^2 = \sqrt{kx} - \frac{x^2}{k}$$

Representación gráfica:



<sup>1</sup> La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

<sup>2</sup> Ya que  $k$  es positiva.

<sup>3</sup> Se trata de integrales inmediatas de tipo potencial.