31 de enero de 2002.

1) (1,2p) Define los siguientes conceptos:

a) Primitiva de una función.

b) Integral indefinida de una función.

2) (1,4p) Enuncia los siguientes teoremas.

a) Teorema del valor medio del cálculo integral.

b) Regla de Barrow.

3) (1,4p) Demuestra:

a) $\int(k\cdot f)=k\cdot\int f$.

b) $(\int f)'=f$.

4) (3,6p) Halla las siguientes integrales:

$$\int\frac{\ln^4 x}{x}\cdot dx \qquad \int x\cdot \text{sen}(2x)\cdot dx \qquad \int\frac{x}{x^2+3x+2}\cdot dx$$

5) (1,2p) Calcula:

$$\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx$$

6) (1,2p) Halla el área de la región del plano limitada por las curvas $y=x^2-4$ e $y=-2x^2+8$.

Ejercicio 4: *Halla las siguientes integrales:*

$$\int \frac{\ln^4 x}{x}\cdot dx \qquad \int x\cdot sen(2x)\cdot dx \qquad \int \frac{x}{x^2+3x+2}\cdot dx$$

(3,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\int \frac{\ln^4 x}{x}\cdot dx = \int \ln^4 x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \overset{1}{=} \frac{\ln^5 x}{5}+C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{\ln^5 x}{5}\right)' = \frac{5\cdot\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}}{5} = \frac{\ln^4 x}{x}$$

b)

$$\int x\cdot sen(2x)\cdot dx \overset{2}{=} -\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos(2x)+\frac{1}{4}\cdot sen(2x)+C$$

S	D	I
+	x	sen(2x)
-	1	$-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$
+	0	$-\frac{1}{4}\cdot sen(2x)$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos(2x)+\frac{1}{4}\cdot sen(2x)\right)' =$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)+x\cdot sen(2x)+\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)=x\cdot sen(2x)$$

c) Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Por tanto:[3]

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)} \Rightarrow$$

[1] Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable lnx=t, (1/x)·dx=dt.

[2] Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son casi inmediatas de tipo seno y coseno. Se puede simplificar el cálculo de estas últimas si previamente hemos hecho el cambio de variable 2x=t, 2·dx=dt.

[3] Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\Rightarrow\ x=A(x+1)+B(x+2)\ \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=-2 \Rightarrow -2=-A \Rightarrow A=2 \\ \text{Si } x=-1 \Rightarrow -1=B \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int\frac{x}{x^2+3x+2}\cdot dx=\int\frac{2}{x+2}\cdot dx+\int\frac{-1}{x+1}\cdot dx=2\cdot\int\frac{1}{x+2}\cdot dx-\int\frac{1}{x+1}\cdot dx \overset{1}{=}$$

$$=2\cdot\ln|x+2|-\ln|x+1|+C$$

Comprobación:

$$(2\cdot\ln|x+2|-\ln|x+1|)'=2\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x+2-x-2}{(x+2)(x+1)}=\frac{x}{x^2+3x+2}$$

[1] Se trata de integrales casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 5: Calcula:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx \overset{1}{=} \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$$

* * *

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx \overset{2}{=} \ln(e^x+1)+C$$

Comprobación:

$$\left[\ln(e^x+1)\right]' = \frac{e^x}{e^x+1}$$

1 La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

2 Se trata de una integral casi inmediata de tipo logaritmo. También puede hacerse con el cambio de variable $e^x+1=t$, $e^x\cdot dx=dt$.

Ejercicio 6: *Halla el área de la región del plano limitada por las curvas $y=x^2-4$ e $y=-2x^2+8$.* *(1,2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=-2x^2+8 \end{cases} \Rightarrow x^2-4=-2x^2+8 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

2º) Averiguamos entre -2 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

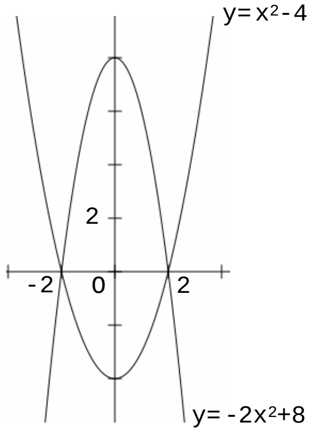
x	y_1	y_2
0	-4	8

3º) Calculamos el área:[1]

$$A=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8-x^2+4)\cdot dx=\int_{-2}^{2}(12-3x^2)\cdot dx \overset{2}{=} [12x-x^3]_{-2}^{2}=$$

$$=(24-8)-(-24+8)=16+16=32$$

Representación gráfica:



[1] Si se repara en la simetría respecto del eje OY, se calcula la integral entre 0 y 2 y se multiplica el resultado por 2.
[2] Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.