1) (1p) Deduce la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y tiene a $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ por vector direccional.

2) (1p) Estudia la posición relativa de dos planos.

3) (1p) Prueba la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

4) (1,7p) Calcula la ecuación continua de la proyección de la recta r sobre el plano π:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+3 = z \qquad \pi \equiv x-y-z+5=0$$

5) (1,7p) Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π:

$$P(1,0,5) \qquad r \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y+3=0 \end{cases} \qquad \pi \equiv x+2y-3z+1=0$$

6) (1,8p) Dado el triángulo de vértices A(3,-1,-1), B(1,2,-7) y C(-5,14,-3), halla:

a) El ángulo B.

b) El área del triángulo ABC.

7) (1,8p) Comprueba que las rectas r y s son paralelas y calcula la distancia entre ellas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{1}$$

Ejercicio 4: *Calcula la ecuación continua de la proyección de la recta r sobre el plano π:*

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=y+3=z \qquad \pi\equiv x-y-z+5=0$$

(1,7 PUNTOS)

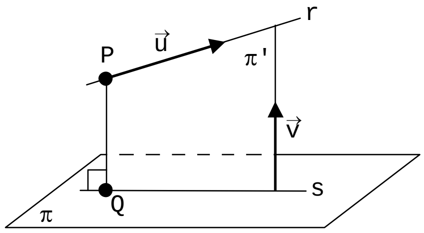
* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r:

$$\frac{x-1}{2}=y+3=z \Rightarrow \begin{cases} P(1,-3,0) \\ \vec{u}=(2,1,1) \end{cases}$$

Sea π' el plano perpendicular a π que contiene la recta r:



El plano π' queda determinado por el punto P(1,-3,0), el vector direccional de la recta r, $\vec{u}(2,1,1)$, y el vector característico del plano π, $\vec{v}(1,-1,-1)$. Por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(y+3)-3z=0 \Rightarrow y-z+3=0$$

La recta s es la intersección de los planos π y π':

$$\begin{cases} x-y-z+5=0 \\ y-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5+y+z \\ y=-3+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-8+2\alpha \\ y=-3+\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow s\equiv\frac{x+8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{1}$$

* * *

También puede hacerse calculando un punto y un vector direccional de la recta s. El punto se obtendría como intersección de la recta r y el plano π; y el vector direccional, multiplicando vectorialmente los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}\wedge\vec{v}$, ya que ambos son perpendiculares a la recta s. Ahora bien, como en este caso los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares,[1] las rectas r y s son paralelas, con lo que tienen el mismo vector direccional. El punto lo obtendríamos, por ejemplo, como intersección de la recta PQ y el plano π. O teniendo en cuenta que el vector $[\overrightarrow{PQ}]$ es colineal con $\vec{v}$ o que es la proyección del vector $[\overrightarrow{PR}]$ sobre $\vec{v}$, siendo R un punto del plano π, por ejemplo (0,0,5).

[1] Ya que su producto escalar es cero.

Ejercicio 5: *Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π:*

$$P(1,0,5) \qquad r \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y+3=0 \end{cases} \qquad \pi \equiv x+2y-3z+1=0$$ *(1,7 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r:

$$r\equiv\begin{cases} x-2z=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2\alpha \\ y=-3 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(0,-3,0) \\ \vec{u}=(2,0,1) \end{cases}$$

El plano que buscando está determinado por el punto P(1,0,5), ya que pasa por él, el vector direccional de la recta r, $\vec{u}(2,0,1)$, por ser paralelo a ella, y el característico del plano π, $\vec{v}(1,2,-3)$, por ser perpendicular a él. Por tanto, su ecuación general es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2(x-1)+7y+4(z-5)=0 \Rightarrow -2x+2+7y+4z-20=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-7y-4z+18=0$$

Ejercicio 6: *Dado el triángulo de vértices A(3,-1,-1), B(1,2,-7) y C(-5,14,-3), halla:* ***a)*** *el ángulo B;* ***b)*** *el área del triángulo ABC.*

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Como $[\overrightarrow{BA}]=(2,-3,6)$ y $[\overrightarrow{BC}]=(-6,12,4)$:

$$\cos B=\cos([\overrightarrow{BA}],[\overrightarrow{BC}])=\frac{[\overrightarrow{BA}]\cdot[\overrightarrow{BC}]}{|[\overrightarrow{BA}]|\cdot|[\overrightarrow{BC}]|}=\frac{(2,-3,6)\cdot(-6,12,4)}{\sqrt{4+9+36}\cdot\sqrt{36+144+16}}=$$

$$=\frac{-12-36+24}{7\cdot 14}=\frac{-12}{49}\Rightarrow B=104^{\circ}10'$$

b) El área del triángulo ABC es:

$$S=\frac{|[\overrightarrow{BA}]\wedge[\overrightarrow{BC}]|}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 6\\ -6 & 12 & 4\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|-84\vec{i}-44\vec{j}+6\vec{k}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9028}=\sqrt{2257}$$

Ejercicio 7: *Comprueba que las rectas r y s son paralelas y calcula la distancia entre ellas:*

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-5}{1}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ z=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=2\alpha \\ z=3-\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0,0,3) \\ \vec{u}=(1,2,-1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-5}{1} \rightarrow \begin{cases} Q(0,1,5) \\ \vec{v}=(-1,-2,1) \end{cases}$$

Como los vectores direccionales de las rectas son opuestos, las rectas son paralelas.

Como las rectas son paralelas y $[\overrightarrow{QP}]=(0,-1,-2)$:

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|[\overrightarrow{QP}]\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|-5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{25+4+1}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}$$