1) (1p) Si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ son dos puntos del espacio, demuestra que $[\overrightarrow{AB}]=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

2) (1p) Deduce la ecuación vectorial de la recta.

3) (1p) Estudia la posición relativa de recta y plano.

4) (1,7p) Halla la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π:

$$P(1,3,1) \qquad r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-2} \qquad \pi\equiv x-2z=0$$

5) (1,8p) Halla el valor del parámetro k para que las rectas r y s sean coplanarias:

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2} \qquad s\equiv\frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{k}=\frac{z+4}{3}$$

6) (1,7p) Calcula la proyección del punto P(2,-1,3) sobre la recta de ecuaciones paramétricas: $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

7) (1,8p) Halla el ángulo que forma el eje de abscisas con el plano que pasa por A(2,2,1), B(1,-2,0) y C(2,0,1).

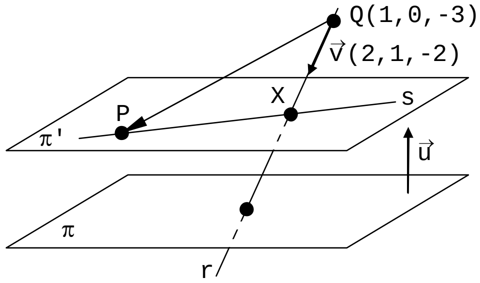
Ejercicio 4: *Halla la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π:*

$$P(1,3,1) \qquad r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-2} \qquad \pi\equiv x-2z=0 \qquad \text{(1,7 PUNTOS)}$$

* * *

Solución:

La recta s se encuentra en el plano π' que pasa por el punto P y es paralelo a π, ya que es paralela al plano π:



$$x-2z+D=0 \overset{1}{\Rightarrow} 1-2+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow \pi'\equiv x-2z+1=0$$

La recta s también se encuentra en el plano π'' determinado por el punto P y la recta r, ya que las rectas r y s se cortan. Ahora bien, dicho plano queda determinado por el punto Q(1,0,-3) y los vectores $\vec{v}=(2,1,-2)$ y $[\overrightarrow{QP}]=(0,3,4)$:[2]

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 10(x-1)-8y+6(z+3)=0 \Rightarrow 5(x-1)-4y+3(z+3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-5-4y+3z+9=0 \Rightarrow \pi''\equiv 5x-4y+3z+4=0$$

La ecuación continua de la recta s se obtiene por intersección de ambos planos:

$$\begin{cases} x-2z=-1 \\ 5x-4y+3z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2z \\ 4y=4+5x+3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2z \\ 4y=4-5+10z+3z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-1/4+(13/4)\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(-1,-1/4,0) \\ \vec{u}=(8,13,4) \end{cases} \Rightarrow s\equiv\frac{x-1}{8}=\frac{y-3}{13}=\frac{z-1}{4}$$

* * *

También puede calcularse la recta s teniendo en cuenta que el producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}\wedge[\overrightarrow{QP}]$ es un vector direccional de la recta s, ya que ambos son perpendiculares a ella. O calculando el punto de corte de las rectas r y s: $X(1+2\alpha,\alpha,-3-2\alpha)$, ya que está en r. Y para calcular el parámetro basta darse cuenta de que dicho punto pertenece al plano π' o que el vector $[\overrightarrow{PX}]$, que es un vector direccional de la recta s, pues P no pertenece a la recta r, ya que no satisface su ecuación, es perpendicular al vector $\vec{u}$, pues la recta s es paralela al plano π.

---

[1] Ya que $P\in\pi'$.

[2] Otra forma de hallarlo es teniendo en cuenta que se trata del plano del haz de arista r, $\alpha(x-2y-1)+\beta(2y+z+3)=0$, que pasa por el punto P.

Ejercicio 5: *Halla el valor del parámetro k, para que las rectas r y s sean coplanarias:*

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2} \qquad s\equiv\frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{k}=\frac{z+4}{3}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2} \rightarrow \begin{cases} P(1,1,-2) \\ \vec{u}=(1,-1,2) \end{cases}$$

$$s\equiv\frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{k}=\frac{z+4}{3} \rightarrow \begin{cases} Q(-5,3,-4) \\ \vec{v}=(4,k,3) \end{cases}$$

Evidentemente, las rectas no son paralelas:

$$\frac{1}{4}\neq\frac{2}{3}$$

Por tanto, para que dichas rectas sean coplanarias los vectores $[\overrightarrow{PQ}]=(-6,2,-2)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & k & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 18-2k+16-8+12k-6=0 \Rightarrow 10k=-20 \Rightarrow k=-2$$

* * *

Otra forma de razonar sería la siguiente. Como las rectas son coplanarias y no son paralelas, se cortan. Por tanto, el siguiente sistema debe ser compatible determinado:[1]

$$\begin{cases} 1+\alpha=-5+4\beta \\ 1-\alpha=3+k\beta \\ -2+2\alpha=-4+3\beta \end{cases}$$

[1] Ya que el punto de corte pertenece a ambas rectas y, por tanto, satisface las ecuaciones de ambas.

Ejercicio 6: *Calcula la proyección del punto P(2,-1,3) sobre la recta de ecuaciones paramétricas: x=3t, y=5t-7, z=2t+2.* *(1,7 PUNTOS)*

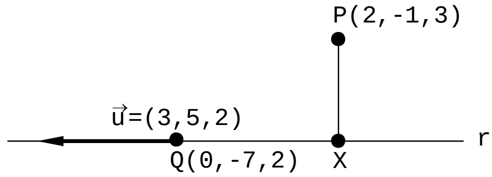
* * *

Solución:

Sea r la recta dada y X la proyección del punto P sobre ella.

Calculamos una determinación lineal de r:

$$\begin{cases} x=3t \\ y=-7+5t \\ z=2+2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q(0,-7,2) \\ \vec{u}=(3,5,2) \end{cases}$$



Como X pertenece a r, satisface su ecuación: X(3t,-7+5t,2+2t).

Y al ser el punto de la recta r más próximo a P, la distancia entre ellos es mínima:

$$d=d(P,X)=\sqrt{(3t-2)^2+(-6+5t)^2+(-1+2t)^2}$$

Como d>0, podemos sustituirla por su cuadrado:

$$C=d^2=(3t-2)^2+(-6+5t)^2+(-1+2t)^2=$$

$$=9t^2-12t+4+36-60t+25t^2+1-4t+4t^2=38t^2-76t+41$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=76t-76=0 \Rightarrow 76t=76 \Rightarrow t=1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en t=1:

$$C''=76 \Rightarrow C''(1)=76>0 \Rightarrow d \text{ es mínima en } t=1$$

Por tanto, X(3,-2,4).

* * *

También puede calcularse el parámetro t teniendo en cuenta que el punto X pertenece al plano perpendicular a la recta r que pasa por P;[2] o que los vectores $[\overrightarrow{PX}]$ y $\vec{u}$ son perpendiculares; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PQX (en este caso, además de X, te saldrá como solución extraña Q).[3] El punto X(x,y,z) puede calcularse también directamente si se observa que $[\overrightarrow{QX}]$ es la proyección de $[\overrightarrow{QP}]$ sobre $\vec{u}$.

---

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

[2] Dicho plano tiene por vector característico el direccional de la recta r.

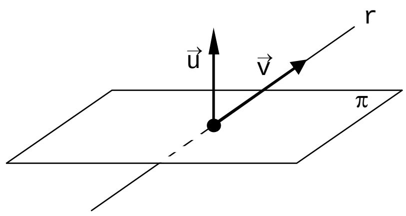
[3] Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo PQX, siempre sale como una de las soluciones el punto Q de la recta r, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por Q, se obtiene $PQ^2+QQ^2=PQ^2$, esto es, $PQ^2=PQ^2$, lo que siempre es cierto.

Ejercicio 7: *Halla el ángulo que forma el eje de abscisas con el plano que pasa por A(2,2,1), B(1,-2,0) y C(2,0,1).* *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Sea r el eje de abscisas y π el plano determinado por los puntos A, B y C:



Como r es el eje de abscisas, $\vec{v}=\vec{i}=(1,0,0)$:

Un vector característico del plano π es:

$$\vec{u}=[\overrightarrow{AB}]\wedge[\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{k}$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen}(r,\pi)=|\cos(\vec{u},\vec{v})|=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|(-2,0,2)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{4+4}\cdot 1}=$$

$$=\frac{|-2|}{\sqrt{8}}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (r,\pi)=45^{o}$$