1) (1,6p) Estudia la posición relativa de dos planos mediante:

a) La discusión del sistema que forman sus ecuaciones.

b) Sus vectores característicos.

2) (1,4p) Deduce la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

3) (1,7p) Calcula la ecuación general del plano que pasa por el punto P, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π:

$$P(3,5,0) \qquad r \equiv \begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases} \qquad \pi \equiv x-y+z=3$$

4) (1,8p) Halla la ecuación continua de la recta paralela a los planos $x-y+z=3$ y $x+2y+2z=1$ que pasa por el origen de coordenadas.

5) (1,7p) Dado el plano de ecuación $\pi \equiv x-2y+2z=3$, se pide:

a) Los planos paralelos que distan 3 unidades de π.

b) El ángulo (π, OX).

6) (1,8p) Calcula la distancia entre las rectas r y s:

$$r \equiv \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$$

Ejercicio 3: *Calcula la ecuación general del plano que pasa por el punto P, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π:*

$$P(3,5,0) \qquad r\equiv\begin{cases}x+2y-1=0\\x-2z+1=0\end{cases} \qquad \pi\equiv x-y+z=3$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r:

$$r\equiv\begin{cases}x+2y-1=0\\x-2z+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1-2y\\1-2y-2z+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1-2y\\z=1-y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1-2\alpha\\y=\alpha\\z=1-\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Q(1,0,1)\\\vec{u}=(-2,1,-1)\end{cases}$$

Como el plano que andamos buscando pasa por el punto P(3,5,0), es paralelo al vector direccional de la recta r, $\vec{u}(-2,1,-1)$, por ser paralelo a ella, y también es paralelo al vector característico del plano π, $\vec{v}(1,-1,1)$, por ser perpendicular a él, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-5 & z\\-2 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow y-5+z=0 \Rightarrow y+z=5$$

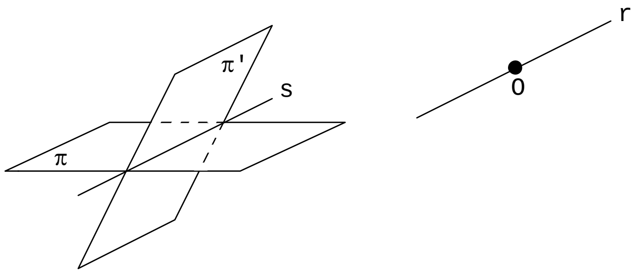
Ejercicio 4: *Halla la ecuación continua de la recta paralela a los planos x-y+z=3 y x+2y+2z=1 que pasa por el origen de coordenadas.*

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sean π y π' los planos dados, s su intersección y r la recta que andamos buscando. Como la recta r es paralela a dichos planos, es también paralela a s:



Calculamos la ecuación de s:

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+2y+2z=1 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x-y+z=3 \\ 3y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+y-z \\ z=-2-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+y+2+3y \\ z=-2-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5+4\alpha \\ y=\alpha \\ z=-2-3\alpha \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{u}=(4,1,-3)$ es también un vector direccional de r; y como esta recta pasa por el origen de coordenadas, su ecuación continua es la siguiente:

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-3}$$

* * *

También puede obtenerse la recta como intersección de los planos paralelos a los dados que pasan por O. O calculando directamente un vector direccional de la recta r: el producto vectorial de los vectores característicos de π y π', ya que ambos vectores son perpendiculares a dicha recta.

[1] A la segunda ecuación le restamos la primera.

Ejercicio 5: *Dado el plano de ecuación $\pi \equiv x-2y+2z=3$, se pide:* ***a)*** *los planos paralelos que distan 3 unidades de π;* ***b)*** *el ángulo (π, OX).*

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Los planos que andamos buscando, por ser paralelos al dado, tienen por ecuación:

$$\pi' \equiv x-2y+2z+D=0$$

Como P(3,0,0) es un punto del plano π y la distancia de éste a los planos buscados es 3:

$$d(\pi,\pi')=3 \Rightarrow d(P,\pi')=3 \Rightarrow \frac{|3+D|}{\sqrt{1+4+4}}=3 \Rightarrow |3+D|=9 \Rightarrow 3+D=\pm 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-3\pm 9 \Rightarrow \begin{cases} D=-12 \\ D=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi' \equiv x-2y+2z-12=0 \\ \pi' \equiv x-2y+2z+6=0 \end{cases}$$

* * *

Otra forma de hacerlo es la siguiente. Sea P(x,y,z) un punto cualquiera de los planos que andamos buscando. Entonces:

$$d(P,\pi)=3 \Rightarrow \frac{|x-2y+2z-3|}{\sqrt{1+4+4}}=3 \Rightarrow |x-2y+2z-3|=9 \Rightarrow x-2y+2z-3=\pm 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y+2z-3=9 \\ x-2y+2z-3=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+2z-12=0 \\ x-2y+2z+6=0 \end{cases}$$

b) Como un vector característico del plano π es $\vec{u}(1,-2,2)$ y un vector direccional del eje de abscisas es $\vec{i}(1,0,0)$:

$$\operatorname{sen}(\pi,OX)=|\cos(\vec{u},\vec{i})|=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{i}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{i}|}=\frac{|(1,-2,2)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{1+4+4}\cdot 1}=$$

$$=\frac{|1|}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3} \Rightarrow (\pi,OX)=19^{\circ}28'16''$$

Ejercicio 6: *Calcula la distancia entre las rectas r y s:*

$$r \equiv \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Hallamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4} \rightarrow \begin{cases} P(-7,5,9) \\ \vec{u}=(3,-1,4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} 4y+z+34=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-34-4y \\ x=y-34-4y+22 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-12-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=-34-4\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q(-12,0,-34) \\ \vec{v}=(-3,1,-4) \end{cases}$$

Como las rectas r y s son paralelas, ya que sus vectores direccionales son opuestos, y $[\overrightarrow{QP}]=(5,5,43)$:

$$d(r,s)=d(Q,r)=\frac{|[\overrightarrow{QP}]\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 5 & 43 \\ -3 & 1 & -4 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{9+1+16}}=\frac{|-63\vec{i}-109\vec{j}+20\vec{k}|}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{16250}}{\sqrt{26}}=25$$

[1] A la primera ecuación le resto la segunda multiplicada por 2.