1) (1p) Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{1/(1-x)}}$$

2) (1p) Dada la función $f(x)=1-x^2+\operatorname{arc\,tg}(1-x^2)$, prueba que existe un valor $\alpha\in(-1,1)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos utilizados y justifica su uso.

3) (1p) Halla la derivada de la siguiente función en $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

4) (1p) Determina los parámetros de la función $y=x^3+bx^2+cx+d$ de modo que $(-1,-1)$ sea un punto de inflexión con tangente paralela a la recta $y=2x+3$.

5) (1p) Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

6) (1p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} x+ay+az=1 \\ x+a^2y+z=a \\ ax+ay+z=1 \end{cases}$$

7) (1p) Halla la inversa de la siguiente matriz y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8) (1p) Demuestra la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =(a+3)\cdot(a-1)^3$$

9) (1p) El vector $\vec{x}$ forma con el vector $\vec{j}$ de la base un ángulo obtuso y es perpendicular a los vectores $\vec{a}(4,-2,-3)$ y $\vec{b}(0,1,3)$. Halla sus coordenadas si su módulo es 26.

10) (1p) Dado el triángulo de vértices los puntos A(1,-1,8), B(2,1,7) y C(4,-4,14), halla la ecuación continua de la altura correspondiente al vértice C.

Ejercicio 1: *Estudia y clasifica las discontinuidades de la función:*

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{1/(1-x)}}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$:

$$1-x\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a\in$Dom(f):[1]

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{1+e^{1/(1-x)}}=\frac{1}{1+e^{1/(1-a)}}=f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad de salto finito en x=1:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{1+e^{1/(1-x)}}=\frac{1}{1+e^{1/0^+}}=\frac{1}{1+e^{+\infty}}=\frac{1}{1+\infty}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{1+e^{1/(1-x)}}=\frac{1}{1+e^{1/0^-}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=\frac{1}{1}=1$$

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

Ejercicio 2: *Dada la función $f(x)=1-x^2+\operatorname{arc\,tg}(1-x^2)$, prueba que existe $\alpha\in(-1,1)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos utilizados y justifica su uso.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Primero[1] derivamos la función f:

$$f'(x)=-2x+\frac{1}{1+(1-x^2)^2}\cdot(-2x)=-2x-\frac{2x}{1+(1-x^2)^2} \Rightarrow \operatorname{Dom}(f')=\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}$$

Como[2] la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle,[3] existe α en (-1,1) tal que $f'(\alpha)=0$.

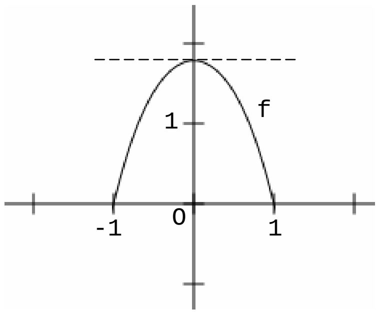
En efecto:

1ª) $f(-1)=f(1)$:

- $f(-1)=1-(-1)^2+\operatorname{arc\,tg}[1-(-1)^2]=1-1+\operatorname{arc\,tg}0=0$
- $f(1)=1-1+\operatorname{arc\,tg}0=0$

2ª) f es continua en [-1,1] por ser derivable en R.

3ª) f es derivable en (-1,1) por serlo en R.



[1] En realidad lo primero que hay que hacer es averiguar si f(-1) es o no igual a f(1). Como son iguales, podemos aplicar el teorema de Rolle al intervalo [-1,1], que es lo que hacemos en el texto.
[2] Observa que $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$. Por tanto, no sería necesario lo que sigue.
[3] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

Ejercicio 3: *Halla la derivada de la siguiente función en x=1:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{\ln x} & si\ \ x\neq 1 \\ 1 & si\ \ x=1 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

La función es derivable en x=1 y su derivada es f'(1)=1/2:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x-1}{\ln x}-1}{x-1}\overset{1}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x}\overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}\overset{3}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+x-1}\overset{2}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

[1] Multiplicamos numerador y denominador por $\ln x$.
[2] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
[3] Multiplicamos numerador y denominador por x.

Ejercicio 4: *Determina los parámetros de la función $y=x^3+bx^2+cx+d$ de modo que (-1,-1) sea un punto de inflexión con tangente paralela a la recta y=2x+3.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Teniendo en cuenta el dato de la pendiente de la recta tangente y la condición necesaria de punto de inflexión, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y"
-1	-1	2	0

Como $y=x^3+bx^2+cx+d$, entonces $y'=3x^2+2bx+c$ e $y''=6x+2b$.

Como los puntos (-1,0), (-1,2) y (-1,-1) pertenecen, respectivamente, a las gráficas de y", y' e y, tenemos lo siguiente:

$$y''(-1)=0 \Rightarrow -6+2b=0 \Rightarrow 2b=6 \Rightarrow b=3$$

$$y'(-1)=2 \Rightarrow 3-2b+c=2 \Rightarrow -2b+c=-1 \overset{1}{\Rightarrow} -6+c=-1 \Rightarrow c=5$$

$$y(-1)=-1 \Rightarrow -1+b-c+d=-1 \Rightarrow b-c+d=0 \overset{2}{\Rightarrow} 3-5+d=0 \Rightarrow d=2$$

[1] Ya que b=3.
[2] Ya que b=3 y c=5.

Ejercicio 5: *Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:*

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$$ *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Para eliminar la raíz, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x-1=t^2 \Rightarrow x=1+t^2 \Rightarrow dx=2t\cdot dt$$

$$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\cdot dx=\int\frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\cdot dt=2\cdot\int\frac{t^2}{1+t^2}\cdot dt \overset{1}{=} 2\cdot\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\cdot dt=$$

$$=2\cdot\int\left(\frac{1+t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\cdot dt=2\cdot\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\cdot dt=2\cdot\int 1\cdot dt-2\cdot\int\frac{1}{1+t^2}\cdot dt \overset{2}{=}$$

$$=2t-2\cdot\operatorname{arc\,tg} t+C \overset{3}{=} 2\cdot\sqrt{x-1}-2\cdot\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-1}+C$$

Comprobación:

$$\left(2\cdot\sqrt{x-1}-2\cdot\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-1}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}-2\cdot\frac{1}{1+x-1}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{x-1}{x\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

1 Sumamos y restamos la unidad al numerador. Se llega al mismo resultado dividiendo t^2 entre t^2+1.

2 La primera integral es inmediata de tipo potencial y la segunda, inmediata de tipo arco tangente.

3 Deshacemos el cambio.

Ejercicio 6: *Discute y resuelve, en su caso, el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} x+ay+az=1 \\ x+a^2y+z=a \\ ax+ay+z=1 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & a & a & 1 \\ 0 & \mathbf{a^2-a} & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2-a-a^2} & 0 \end{array}\right) \overset{3}{\to}$$

$$\to \begin{cases} a^2-a=0 \Rightarrow a\cdot(a-1)=0 \Rightarrow a=0,\ a=1 \\ a^2+a-2=0 \overset{4}{\Rightarrow} (a-1)\cdot(a+2)=0 \Rightarrow a=1,\ a=-2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2y+2z \\ z=-1-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1-2\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible:[6]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+az=1 \\ a(a-1)y+(1-a)z=a-1 \\ (2-a-a^2)z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow a(a-1)y=a-1 \Rightarrow y=\frac{a-1}{a(a-1)} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-ay=1-a\cdot\frac{1}{a}=1-1 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-a·1ªf.
2 3ªf+2ªf.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 4º).
4 Factorizamos el polinomio.
5 2ªf·1/3. Suprimimos la última ecuación por trivial.
6 Ya que la tercera ecuación es incompatible.
7 3ªf-2·2ªf.

Ejercicio 7: *Halla la inversa de la siguiente matriz y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$ (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Como $|A|\neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&2&1\\0&0&1\end{vmatrix}=4$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{1} A^*=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&0\\-2&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{2} (A^*)'=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-1&2&-1\\0&0&4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2&0&-2\\-1&2&-1\\0&0&4\end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\-1/4&1/2&-1/4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\-1/4&1/2&-1/4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0&0+0+0&-1+0+1\\1/2-1/2+0&0+1+0&-1/2-1/2+1\\0+0+0&0+0+0&0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

* * *

También puede hacerse por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\2&4&2&0&2&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\0&4&1&-1&2&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{5}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&-1\\0&4&0&-1&2&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&0&-1/2\\0&1&0&-1/4&1/2&-1/4\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0&-1/2\\-1/4&1/2&-1/4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1 Calculamos la adjunta de A.
2 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.
3 2ªf·2.
4 2ªf-1ªf.
5 2ªf-3ªf; 1ªf-3ªf.
6 1ªf·1/2; 2ªf·1/4.

Ejercicio 8: *Demuestra la siguiente identidad:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+3)\cdot(a-1)^3$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{1} \begin{vmatrix} 3+a & 1 & 1 & a \\ 3+a & 1 & a & 1 \\ 3+a & a & 1 & 1 \\ 3+a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{2} \begin{vmatrix} 3+a & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} \underset{=}{3}$$

$$=-\begin{vmatrix} 3+a & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} \underset{=}{4} \begin{vmatrix} 3+a & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \underset{=}{5} (3+a)\cdot(a-1)^3$$

1 1ªc+2ªc+3ªc+4ªc.
2 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf; 4ªf-1ªf.
3 2ªc ↔ 3ªc. También puede hacerse desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna
4 Multiplicamos la última fila por -1.
5 El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 9: *El vector $\vec{x}$ forma con el vector $\vec{j}$ de la base un ángulo obtuso y es perpendicular a los vectores $\vec{a}=(4,-2,-3)$ y $\vec{b}=(0,1,3)$. Halla sus coordenadas si su módulo es 26.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Calculamos $\vec{a}\wedge\vec{b}$:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}=(-3,-12,4)$$

Como el vector $\vec{x}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es colineal[1] con $\vec{a}\wedge\vec{b}$. Por tanto:

$$\vec{x}=\alpha(-3,-12,4)=(-3\alpha,-12\alpha,4\alpha)$$

Como el módulo de $\vec{x}$ es 26:

$$|\vec{x}|=26 \Rightarrow \sqrt{9\alpha^2+144\alpha^2+16\alpha^2}=26 \Rightarrow 169\alpha^2=676 \Rightarrow \alpha^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases}\vec{x}_1=(-6,-24,8)\\ \vec{x}_2=(6,24,-8)\end{cases}$$

Por último, como el vector $\vec{x}$ y el vector $\vec{j}=(0,1,0)$ de la base forman un ángulo obtuso, su producto escalar es negativo:

$$\begin{cases}\vec{x}_1\cdot\vec{j}=(-6,-24,8)\cdot(0,1,0)=-24\\ \vec{x}_2\cdot\vec{j}=(6,24,-8)\cdot(0,1,0)=24\end{cases} \Rightarrow \vec{x}=(-6,-24,8)$$

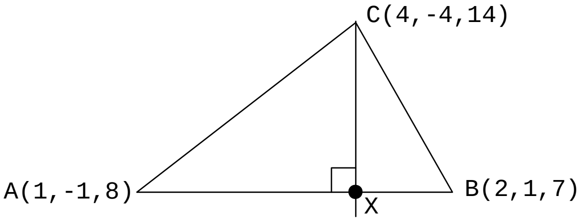
[1] Tiene la misma dirección.

Ejercicio 10: *Dado el triángulo de vértices los puntos A(1,-1,8), B(2,1,7) y C(4,-4,14), halla la ecuación continua de la altura correspondiente al vértice C.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Sea ABC el triángulo dado. Trazamos la altura correspondiente al vértice C que corta al lado opuesto en X:



El plano ABC, que está determinado por el punto A(1,-1,8) y los vectores $[\overrightarrow{AB}]=(1,2,-1)$ y $[\overrightarrow{AC}]=(3,-3,6)$, tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-8 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 9(x-1)-9(y+1)-9(z-8)=0 \Rightarrow x-1-y-1-z+8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y-z+6=0$$

El plano que pasa por C y es perpendicular a la recta AB tiene por vector característico $[\overrightarrow{AB}]=(1,2,-1)$. Por tanto, su ecuación es:

$$x+2y-z+D=0 \Rightarrow 4-8-14+D=0 \Rightarrow D=18 \Rightarrow x+2y-z+18=0$$

La altura CX es la intersección de ambos planos:

$$\begin{cases} x-y-z=-6 \\ x+2y-z=-18 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x-y-z=-6 \\ 3y=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6-4+z \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-10+\alpha \\ y=-4 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x+10}{1}=\frac{y+4}{0}=\frac{z}{1}$$

* * *

También puede calcularse la altura hallando directamente un vector direccional de ésta: el producto vectorial de $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{AB}]\wedge[\overrightarrow{AC}]$, ya que ambos vectores son perpendiculares a dicha recta. O calculando el punto X como intersección de la recta AB y el plano perpendicular a ella que pasa por C; o teniendo en cuenta que los vectores $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{CX}]$ son perpendiculares; o considerando que $[\overrightarrow{AX}]$ es la proyección de $[\overrightarrow{AC}]$ sobre $[\overrightarrow{AB}]$; o fijándose en que X es el punto de la recta AB más próximo a C; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ACX (en este caso, además de X, te saldrá como solución extraña A).[2]

[1] A la segunda ecuación le resto la primera.
[2] Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo ACX, siempre sale como una de las soluciones el punto A de la recta AB, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por A, se obtiene $AA^2+AC^2=AC^2$, esto es, $AC^2=AC^2$, lo que siempre es cierto.