

1) (1p) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot e^{1/x})$$

2) (1p) Halla las ecuaciones de las asíntotas y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

3) (1p) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la siguiente función en el punto de abscisa  $\pi$ :

$$y = \operatorname{sen} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

4) (1p) Determina los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  si se sabe que la recta tangente a la gráfica de la función  $y = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$  en su punto de inflexión es  $y = 2x + 3$ .

5) (1p) Calcula una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

6) (1p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ my-z=m \\ mx+2z=0 \end{array} \right\}$$

7) (1p) Dadas las matrices A y B, halla X si  $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8) (1p) Prueba la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

9) (1p) Dados los puntos  $A(1,-1,2)$ ,  $B(-2,0,3)$  y  $C(2,0,-1)$ , halla la ecuación continua de la altura del triángulo ABC relativa al vértice A.

10) (1p) Dadas las rectas r y s, halla la ecuación del plano que determinan y el ángulo que dicho plano forma con el eje de abscisas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{0}$$

**Ejercicio 1:** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot e^{1/x})$$

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

Este límite no existe:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x \cdot e^{1/x}) = 0 \cdot e^{1/0^-} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \cdot e^{1/x}) \stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{1/x}}{1/x} \stackrel{2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{1/x} \cdot (1/x)'}{(1/x)'} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$$

---

<sup>1</sup> Transformamos la indeterminación  $0 \cdot \infty$  en la indeterminación  $\infty/\infty$ .

<sup>2</sup> Como sale la indeterminación  $\infty/\infty$ , aplicamos L'Hôpital.

**Ejercicio 2:** Halla las ecuaciones de las asíntotas y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

1º)  $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

2º) La recta  $x=0$  es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

3º) La función tiene una discontinuidad evitable en  $x=1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

4º) La recta  $y=0$  es asíntota horizontal de la función en  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x-1} - 0 = \frac{\ln x}{x-1}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en  $+\infty$ , ya que numerador y denominador son positivos, la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

<sup>1</sup> Como sale la indeterminación  $0/0$ , aplicamos L'Hôpital.

<sup>2</sup> Como sale la indeterminación  $\infty/\infty$ , aplicamos L'Hôpital.

**Ejercicio 3:** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la siguiente función en el punto de abscisa  $\pi$ :

$$y = \operatorname{sen} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

\* \* \*

**Solución:**

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(\pi) = \operatorname{sen} \frac{\operatorname{sen} \pi}{\pi} = \operatorname{sen} 0 = 0$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:

$$y' = \cos \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)' = \cos \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\cos x \cdot x - \operatorname{sen} x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} \cdot \cos \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(\pi) = \frac{\pi \cdot \cos \pi - \operatorname{sen} \pi}{\pi^2} \cdot \cos \frac{\operatorname{sen} \pi}{\pi} = \frac{\pi \cdot (-1) - 0}{\pi^2} \cdot \cos 0 = -1/\pi$$

Resumiendo:

x	y	y'
$\pi$	0	$-1/\pi$

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y - 0 = -\frac{1}{\pi} \cdot (x - \pi) \Rightarrow y = -\frac{1}{\pi} \cdot x + 1$$

**Ejercicio 4:** Determina los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  si se sabe que la recta tangente a la gráfica de la función  $y=2x^3+12x^2+ax+b$  en su punto de inflexión es  $y=2x+3$ .

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

La condición necesaria de punto de inflexión es que la derivada segunda valga cero:

$$y=2x^3+12x^2+ax+b \Rightarrow y'=6x^2+24x+a \Rightarrow y''=12x+24=12(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$$

Por el criterio de la derivada tercera,  $x=-2$  es punto de inflexión:

$$y'''=12 \Rightarrow y'''(-2)=12 \neq 0$$

Como  $y=2x+3$  es la recta tangente en dicho punto, podemos calcular la ordenada de éste:

$$y(-2)=2 \cdot (-2)+3=-1$$

Teniendo en cuenta que la pendiente de la recta tangente es 2, podemos hacer el siguiente resumen:

x	y	y'
-2	-1	2

Como los puntos  $(-2,2)$  y  $(-2,-1)$  pertenecen a las gráficas de las funciones  $y'$  e  $y$ , respectivamente, tenemos lo siguiente:

$$y'(-2)=2 \Rightarrow 24-48+a=2 \Rightarrow a=26$$

$$y(-2)=-1 \Rightarrow -16+48-2a+b=-1 \stackrel{1}{\Rightarrow} b=-1+16-48+52 \Rightarrow b=19$$

---

<sup>1</sup> Ya que  $a=26$ .

**Ejercicio 5:** Calcula una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot dx &= \int x^{-1/2} \cdot \ln x \cdot dx \stackrel{1}{=} 2x^{1/2} \cdot \ln x - 2 \cdot \int x^{-1/2} \cdot dx \stackrel{2}{=} \\ &= 2x^{1/2} \cdot \ln x - 2 \cdot \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2x^{1/2} \cdot \ln x - 4x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

S	D	I
+	$\ln x$	$x^{-1/2}$
-	$\frac{1}{x}$	$\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2x^{1/2}$

Comprobación:

$$(2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \ln x + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

<sup>1</sup> Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

<sup>2</sup> Esta integral es inmediata de tipo potencial.

**Ejercicio 6:** Discute y resuelve, en su caso, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ my-z=m \\ mx+2z=0 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

\* \* \*

**Solución:**

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & m & -1 & m \\ m & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & m & -1 & m \\ 0 & -3m & 2-m & -5m \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & m & -1 & m \\ 0 & 0 & -1-m & -2m \end{array} \right) \stackrel{3}{\rightarrow} \begin{cases} m=0 \\ -1-m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

**1º)** Si  $m=-1$ , el sistema es incompatible:<sup>4</sup>

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

**2º)** Si  $m=0$ , el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{5}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+3y+z=5 \\ -z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-3y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$$

**3º)** En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ my-z=m \\ -(1+m)z=-2m \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = \frac{2m}{m+1}} \Rightarrow my = m + \frac{2m}{m+1} = \frac{m^2+m+2m}{m+1} = \frac{m(m+3)}{m+1} \Rightarrow \boxed{y = \frac{m+3}{m+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5 - 3y - z = 5 - 3 \cdot \frac{m+3}{m+1} - \frac{2m}{m+1} = \frac{5m+5-3m-9-2m}{m+1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{-4}{m+1}}$$

<sup>1</sup>  $3^{\text{af}} - m \cdot 1^{\text{af}}$ .

<sup>2</sup>  $3^{\text{af}} + 3 \cdot 2^{\text{af}}$ .

<sup>3</sup> Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

<sup>4</sup> Ya que la tercera ecuación es incompatible.

<sup>5</sup>  $3^{\text{af}} - 2^{\text{af}}$ .



**Ejercicio 7:** Dadas las matrices  $A$  y  $B$ , halla  $X$  si  $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

Como  $|A| \neq 0$ , la matriz  $A$  es inversible:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$$

Por tanto:<sup>1</sup>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} (A^*)' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot X \cdot A = B &\Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$A^{-1} \cdot X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

<sup>1</sup> También puede calcularse la inversa de  $A$  por el método de Gauss.

<sup>2</sup> Calculamos la adjunta de  $A$ .

<sup>3</sup> Calculamos la traspuesta de la adjunta de  $A$ .

**Ejercicio 8:** Prueba la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)^3 \quad (1 \text{ PUNTO})$$

\* \* \*

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} (x+1)^3$$

---

<sup>1</sup>  $1^a c - 4^a c$ ;  $2^a c - 4^a c$ ;  $3^a c - 4^a c$

<sup>2</sup> El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

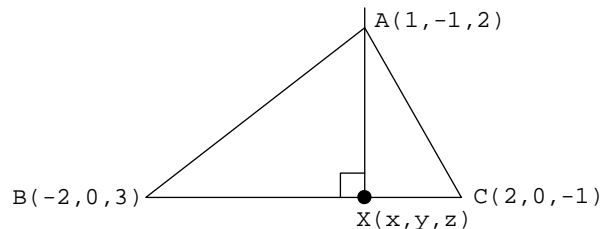
**Ejercicio 9:** Dados los puntos  $A(1,-1,2)$ ,  $B(-2,0,3)$  y  $C(2,0,-1)$ , halla la ecuación continua de la altura del triángulo  $ABC$  relativa al vértice  $A$ .

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

Sea  $ABC$  el triángulo dado. Trazamos la altura correspondiente al vértice  $A$  que corta al lado opuesto en  $X$ :



Como  $[\vec{BX}]$  es la proyección de  $[\vec{BA}]$  sobre  $[\vec{BC}]$ :

$$[\vec{BX}] = \frac{[\vec{BA}] \cdot [\vec{BC}]}{[\vec{BC}] \cdot [\vec{BC}]} \cdot [\vec{BC}] \Rightarrow (x+2, y, z-3) = \frac{(3, -1, -1) \cdot (4, 0, -4)}{(4, 0, -4) \cdot (4, 0, -4)} \cdot (4, 0, -4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2, y, z-3) = \frac{12+0+4}{16+0+16} \cdot (4, 0, -4) \Rightarrow (x+2, y, z-3) = \frac{1}{2} \cdot (4, 0, -4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2, y, z-3) = (2, 0, -2) \Rightarrow \begin{cases} x+2=2 \\ y=0 \\ z-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow X(0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\vec{XA}] = (1, -1, 1) \Rightarrow XA \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

\* \* \*

También puede hallarse la altura calculando directamente un vector direccional: el producto vectorial de  $[\vec{BC}]$  por un vector característico del plano  $ABC$ , ya que ambos son perpendiculares a dicha recta. O como intersección del plano  $ABC$  y el perpendicular a la recta  $BC$  que pasa por  $A$ . O hallando el punto  $X$  como intersección de este último plano con la recta  $BC$ . O teniendo en cuenta que el punto  $X$  está en la recta  $BC$  y que los vectores  $[\vec{XA}]$  y  $[\vec{BC}]$  son perpendiculares; o que  $X$  es el punto de la recta  $BC$  más próximo a  $A$ ; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo  $ABX$  (en este caso, además de  $X$ , te saldrá como solución extraña  $B$ ).<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo  $ABX$ , siempre sale como una de las soluciones el punto  $B$  de la recta  $BC$ , ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes  $X$  por  $B$ , se obtiene  $AB^2 + BB^2 = AB^2$ , esto es,  $AB^2 = AB^2$ , lo que siempre es cierto.

**Ejercicio 10:** Dadas las rectas  $r$  y  $s$ , halla la ecuación del plano que determinan y el ángulo que dicho plano forma con el eje de abscisas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{0} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

\* \* \*

**Solución:**

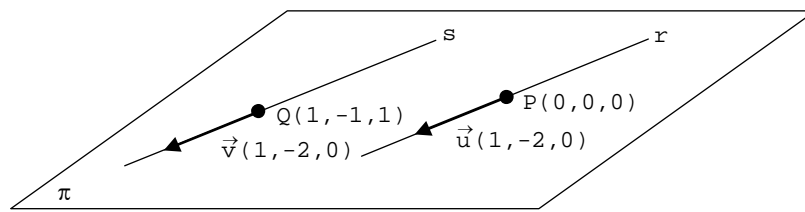
a) Calculamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-2\alpha \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,-2,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{0} \rightarrow \begin{cases} Q(1,-1,1) \\ \vec{v}=(1,-2,0) \end{cases}$$

Como las rectas tienen el mismo vector direccional, son paralelas.

Por tanto, una determinación lineal del plano  $\pi$  que definen dichas rectas es  $(P, \vec{u}, [\vec{PQ}])$ :



Como  $[\vec{PQ}]=(1,-1,1)$ , la ecuación del plano  $\pi$  es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - y + z = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 0$$

b) Como el eje OX tiene por vector direccional  $\vec{i}(1,0,0)$  y el vector característico del plano es  $\vec{w}(2,1,-1)$ :

$$\begin{aligned} \text{sen}(\text{OX}, \pi) &= \frac{|\vec{i} \cdot \vec{w}|}{|\vec{i}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{|(1,0,0) \cdot (2,1,-1)|}{|(1,0,0)| \cdot |(2,1,-1)|} = \\ &= \frac{2}{1 \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow (\text{OX}, \pi) = 54^\circ 44' 8,2'' \end{aligned}$$