24 de mayo de 2001.[1]

1) Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot \operatorname{sen} x}{\cos x-1}$$

2) Halla a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en x=1. Calcula la ecuación de la recta tangente en dicho punto:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+b & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1/x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

3) Encuentra las coordenadas del punto de la gráfica de la función $y=\sqrt{1+2x}$ que se encuentre más próximo de P(2,0).

4) Halla:

$$\int \frac{x^3-4}{x^3-x}\cdot dx$$

5) Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=-2a-2 \end{array}\right\}$$

6) Dada la matriz A:

a) Halla su rango según los valores de k. ¿Para qué valores de k tiene inversa?

b) Calcula su inversa para k=2.

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 3 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}=0$$

8) Halla la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r:

P(1,1,1) $\qquad r\equiv\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$

[1] Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot \operatorname{sen} x}{\cos x-1}$$

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot \operatorname{sen} x}{\cos x-1} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x} \overset{2}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2/2} = \lim_{x\to 0}(-2) = -2$$

[1] Multiplicamos numerador y denominador por -1. Como sale la indeterminación 0/0, puede hacerse por L'Hôpital. También se puede multiplicar numerador y denominador por $\cos x+1$ y utilizar luego el hecho de que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$.
[2] Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$ y $1-\cos x \sim x^2/2$.

Ejercicio 2: *Halla a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en x=1. Calcula la ecuación de la recta tangente en dicho punto:*

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+b & \text{si } x\le 1 \\ x^2-1/x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

* * *

Solución:

a) Si $x\neq 1$, la derivada de f es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & \text{si } x<1 \\ 2x+1/x^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Si f es continua en x=1, entonces a+2b=0:

- $f(1)=a+2b$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(ax^2+bx+b)=a+2b$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2-1/x)=0$

Si f es derivable en x=1, entonces 2a+b=3:

- $f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(2ax+b)=2a+b$
- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x+1/x^2)=3$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 2a+b=3 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} a+2b=0 \\ -3b=3 \end{cases} \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a=2$$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada en x=1:[2]

- $f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{ax^2+bx+b-a-2b}{x-1} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{2ax+b}{1}=2a+b$
- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2-1/x-a-2b}{x-1}=\dfrac{-a-2b}{0^+} \overset{4}{\Rightarrow} -a-2b=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2-1/x-a-2b}{x-1} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{2x+1/x^2}{1}=3$$

Por tanto, para que la función sea derivable, 2a+b=3. Llegamos, pues, al mismo sistema que antes.

b) Como f(1)=0 y f'(1)=3, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-0=3(x-1) \Rightarrow y=3x-3$$

---

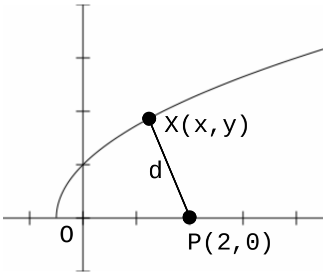
[1] A la segunda ecuación le resto dos veces la primera.
[2] Ya que la derivabilidad implica la continuidad.
[3] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
[4] Si $-a-2b\neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en x=1.

Ejercicio 3: *Encuentra las coordenadas del punto de la gráfica de la función $y=\sqrt{1+2x}$ que se encuentre más próximo de $P(2,0)$.*

* * *

Solución:

Sea d la distancia del punto $P(2,0)$ a un punto cualquiera $X(x,y)$ de la gráfica de la función:



La distancia de P a X tiene que ser mínima:

$$d=d(P,X)=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2-4x+4+y^2}$$

Tenemos que expresar la distancia en función de una sola variable. Ahora bien, como X pertenece a la gráfica de la función, satisface su ecuación. Por tanto:

$$y=\sqrt{1+2x} \Rightarrow y^2=1+2x \Rightarrow d=\sqrt{x^2-4x+4+1+2x}=\sqrt{x^2-2x+5}$$

Como $d>0$, podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C=x^2-2x+5$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $x=1$:

$$C''=2 \Rightarrow C''(1)=2>0 \Rightarrow d \text{ es mínima en } x=1$$

Por último:

$$x=1 \Rightarrow y=\sqrt{3} \Rightarrow X(1,\sqrt{3})$$

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 4: Halla:

$$\int \frac{x^3-4}{x^3-x}\cdot dx$$

* * *

Solución:

Como se trata de una integral racional en la que numerador y denominador son del mismo grado, hacemos primero la división:

$$\begin{array}{r|l} x^3-4 & x^3-x \\ \cline{2-2} -x^3+x & 1 \\ \hline x-4 & \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3-4}{x^3-x}\cdot dx = \int\left(1+\frac{x-4}{x^3-x}\right)\cdot dx = \int 1\cdot dx + \int \frac{x-4}{x^3-x}\cdot dx = x + \int \frac{x-4}{x^3-x}\cdot dx$$

Para hallar esta última integral, calculamos las raíces del denominador: $x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x=-1,\ x=0,\ x=1$.

Por tanto:[1]

$$\frac{x-4}{x^3-x}=\frac{x-4}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4=A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=0 \Rightarrow -4=-A \Rightarrow A=4 \\ \text{Si } x=-1 \Rightarrow -5=2B \Rightarrow B=-5/2 \\ \text{Si } x=1 \Rightarrow -3=2C \Rightarrow C=-3/2 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x-4}{x^3-x}\cdot dx = \int \frac{4}{x}\cdot dx + \int \frac{-5/2}{x+1}\cdot dx + \int \frac{-3/2}{x-1}\cdot dx = 4\cdot \int \frac{1}{x}\cdot dx - \frac{5}{2}\cdot \int \frac{1}{x+1}\cdot dx - \frac{3}{2}\cdot \int \frac{1}{x-1}\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$= 4\cdot \ln|x| - \frac{5}{2}\cdot \ln|x+1| - \frac{3}{2}\cdot \ln|x-1| + C$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3-4}{x^3-x}\cdot dx = x + 4\cdot \ln|x| - \frac{5}{2}\cdot \ln|x+1| - \frac{3}{2}\cdot \ln|x-1| + C$$

Comprobación:

$$\left(x+4\cdot \ln|x| - \frac{5}{2}\cdot \ln|x+1| - \frac{3}{2}\cdot \ln|x-1|\right)' = 1+\frac{4}{x}-\frac{5}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}=$$

$$=\frac{2(x^3-x)+8(x^2-1)-5(x^2-x)-3(x^2+x)}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{2x^3-8}{2(x^3-x)}=\frac{x^3-4}{x^3-x}$$

---

[1] Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

[2] La primera integral es inmediata de tipo logaritmo y las otras dos, casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 5: *Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado:*

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=-2a-2 \end{array}\right\}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2a-2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2a-2 \\ 1 & a & 1 & a+2 \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2a-2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3a+4 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 2a^2+3a \end{array}\right) \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & a & -2a-2 \\ 0 & \mathbf{a-1} & 1-a & 3a+4 \\ 0 & 0 & \mathbf{2-a-a^2} & 2a^2+6a+4 \end{array}\right) \overset{4}{\to} \begin{cases} a-1=0 \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+y-2z=2 \\ -3y+3z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-2/3-z+2z \\ y=2/3+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4/3+\alpha \\ y=2/3+\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=1, el sistema es incompatible:[5]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado.

---

1 $1^a f \leftrightarrow 3^a f$.

2 $2^a f - 1^a f$; $3^a f - a\cdot 1^a f$.

3 $3^a f + 2^a f$.

4 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tendríamos que despejar luego (caso 3º) si tuviéramos que hacerlo.

5 Ya que contiene ecuaciones incompatibles.

Ejercicio 6: *Dada la matriz A: **a)** halla su rango según los valores de k. ¿Para qué valores de k tiene inversa?; **b)** calcula su inversa para k=2.*

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 3 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 3 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{k} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{k-1} & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to \begin{cases} k=0 \\ k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=0, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{3}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{4}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2º) Si k=1, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{4}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3º) En los demás casos el rango de A es 3 y, por tanto, la matriz es inversible.

b) Aplicamos el método de Gauss:[5]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{6}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{7}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{8}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3+0 & -1+1+0 & 3-3+0 \\ 0+3-3 & 0+1+0 & 0-3+3 \\ -2+3-1 & -1+1+0 & 3-3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 3ªf-1ªf.
2 2ªf+1ªf.
3 2ªf·1/3.
4 3ªf-2ªf.
5 También puede hacerse por determinantes.
6 2ªf-3·3ªf.
7 1ªf-2ªf.
8 1ªf·1/2.

Ejercicio 7: *Resuelve la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}=0$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}=0 \overset{1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}=0 \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}=0 \overset{3}{\Rightarrow} (x-1)\cdot(x^3+1+x-x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot(x^3+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^3+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

1 1ªc+2ªc.

2 Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.

3 Desarrollamos el determinante por la regla de Sarrus.

Ejercicio 8: *Halla la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r:*

$$P(1,1,1) \qquad r\equiv\begin{cases}x+y+z=0\\2x+y+3z=1\end{cases}$$

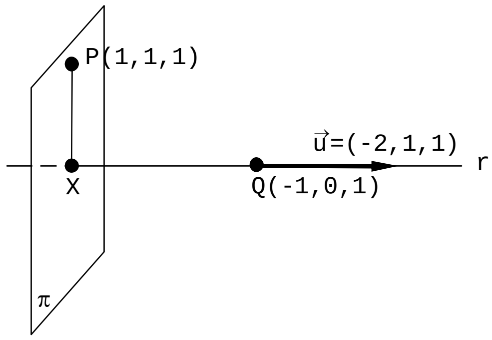
* * *

Solución:

Calculamos las ecuaciones paramétricas y una determinación lineal de la recta r:

$$\begin{cases}x+y+z=0\\2x+y+3z=1\end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases}x+y+z=0\\-y+z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-y-1-y\\z=1+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1-2\alpha\\y=\alpha\\z=1+\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Q(-1,0,1)\\\vec{u}=(-2,1,1)\end{cases}$$

Sea X la proyección del punto P sobre la recta r y π, el plano perpendicular a r que pasa por P:



Como el plano π pasa por P(1,1,1) y tiene a $\vec{u}(-2,1,1)$ como vector característico, su ecuación es:

$$-2x+y+z+D=0 \Rightarrow -2+1+1+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \pi\equiv-2x+y+z=0$$

Como el punto X está en la recta r, $X(-1-2\alpha,\alpha,1+\alpha)$.

Por último, como X está también en el plano π, satisface su ecuación:

$$-2(-1-2\alpha)+\alpha+1+\alpha=0 \Rightarrow 2+4\alpha+\alpha+1+\alpha=0 \Rightarrow 6\alpha=-3 \Rightarrow \alpha=-1/2 \Rightarrow X(0,-1/2,1/2)$$

* * *

También puede calcularse el parámetro α teniendo en cuenta que los vectores $[\overrightarrow{PX}]$ y $\vec{u}$ son perpendiculares.[2] O considerando que PX es la mínima distancia de P a r. O aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PQX (en este caso, además de X, te saldrá como solución extraña Q).[3] Puede calcularse directamente X(x,y,z) teniendo en cuenta que el vector $[\overrightarrow{QX}]$ es la proyección de $[\overrightarrow{QP}]$ sobre $\vec{u}$.

---

1 A la segunda ecuación le restamos dos veces la primera.

2 Y que, por tanto, su producto escalar es cero.

3 Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo PQX, siempre sale como una de las soluciones el punto Q de la recta r, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por Q, se obtiene $PQ^2+QQ^2=PQ^2$, esto es, $PQ^2=PQ^2$, lo que siempre es cierto.