

1) (1,2p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}}$$

2) (1,3p) Halla m y n para que sea derivable la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3) (1,3p) Deriva y simplifica la función:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{cos} x}$$

4) (1,2p) Halla:

$$\int \frac{x}{1-x^2} \cdot dx$$

5) (1,2p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro a:

$$\begin{cases} ax - y = a + 1 \\ ax + ay + a^2z = 3a \\ ax - y + (a - a^2)z = 1 - 5a \end{cases}$$

6) (1,3p) Dadas las matrices A y B, halla $(A \cdot B)^{-1}$ y $(A \cdot B)^n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) (1,3p) Halla la recta que pasa por el punto P, es paralela al plano π y corta a la recta r:

$$P(0, 1, 2) \quad \pi \equiv y - z = 0 \quad r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

8) (1,2p) Calcula la distancia del eje de abscisas a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}} \quad (1, 2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}} &\stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}} \stackrel{2}{=} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x} \cdot (1 + \operatorname{sen} x - 1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x} = e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

¹ Ya que el dominio de la función está formado por todos los números positivos x (el argumento del logaritmo debe ser positivo) tales que $\operatorname{sen} x \neq -1$ (la base de las funciones potencial-exponenciales debe ser positiva) y $\operatorname{sen} x \neq 0$.

² Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞ .

Ejercicio 2: Halla m y n para que sea derivable la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1,3 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

Si $x \neq 1$, la derivada de f es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si f es continua¹ en $x=1$, entonces $-4+m=-1+n$:

- $f(1) = -4 + m$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 - 5x + m) = -4 + m$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (-x^2 + nx) = -1 + n$

Si f es derivable en $x=1$, entonces $-3 = -2 + n$:

- $f'_-(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (2x - 5) = -3$
- $f'_+(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (-2x + n) = -2 + n$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -4 + m = -1 + n \\ -3 = -2 + n \end{cases} \Rightarrow n = -1 \Rightarrow m = 2$$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada en $x=1$:²

- $f'_-(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 5x + m + 4 - m}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} \stackrel{3}{=} \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x-4) = -3$
- $f'_+(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-x^2 + nx + 4 - m}{x - 1} = \frac{-1 + n + 4 - m}{0^+} \stackrel{4}{\Rightarrow} n - m + 3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f'_+(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-x^2 + nx + 4 - m}{x - 1} \stackrel{5}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-2x + n}{1} = -2 + n$

Por tanto, para que la función sea derivable, $-2 + n = -3$. Llegamos, pues, al mismo sistema que antes.

¹ Si f es derivable en $x=1$, debe ser continua en dicho punto.

² Ya hemos visto al comienzo del ejercicio que la función es derivable en los demás puntos.

³ Factorizamos el numerador.

⁴ Si $n - m + 3 \neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en $x=1$.

⁵ Como sale la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital. También se puede sustituir m por $n+3$, factorizar por Ruffini y simplificar.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica la función:

$$y = \arctg \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\right)^2} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2}} \cdot \frac{\cos x \cdot (1 + \cos x) - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 + \cos x}{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{1 + \cos x}{2 + 2\cos x} = \frac{1 + \cos x}{2(1 + \cos x)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 4: Halla:

$$\int \frac{x}{1-x^2} \cdot dx$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

Por tanto:¹

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x^2} &= \frac{x}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1+x)(1-x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= A(1+x)+B(1-x) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=1 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=1/2 \\ \text{Si } x=-1 \Rightarrow -1=2B \Rightarrow B=-1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1-x^2} \cdot dx &= \int \frac{1/2}{1-x} \cdot dx + \int \frac{-1/2}{1+x} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{-1}{1-x} \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+x} \cdot dx \stackrel{2}{=} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \ln|1-x| - \frac{1}{2} \cdot \ln|1+x| + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} \cdot \ln|1-x| - \frac{1}{2} \cdot \ln|1+x| \right)' &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} = \\ &= \frac{1+x-1-x}{2(1-x)(1+x)} = \frac{2x}{2(1-x)(1+x)} = \frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

¹ Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

² Se trata de integrales casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 5: Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro a :

$$\begin{cases} ax-y=a+1 \\ ax+ay+a^2z=3a \\ ax-y+(a-a^2)z=1-5a \end{cases} \quad (1,2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & a+1 \\ a & a & a^2 & 3a \\ a & -1 & a-a^2 & 1-5a \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+1 & a^2 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & -6a \end{array} \right) \stackrel{2}{\rightarrow} \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \\ a(1-a)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1°) Si $a=-1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-3 \end{cases}$$

2°) Si $a=0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:⁴

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \stackrel{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow -y=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1 \\ z=\beta \end{cases}$$

3°) Si $a=1$, el sistema es incompatible:⁶

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

4°) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} ax-y=a+1 \\ (a+1)y+a^2z=2a-1 \\ a(1-a)z=-6a \end{array} \right\} \Rightarrow z = \frac{-6a}{a(1-a)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{6}{a-1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow & (a+1)y = 2a-1 - \frac{6a^2}{a-1} = \frac{2a^2-2a-a+1-6a^2}{a-1} = \frac{-4a^2-3a+1}{a-1} \stackrel{7}{=} \frac{(-4a+1)(a+1)}{a-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \boxed{y = \frac{-4a+1}{a-1}} \Rightarrow ax = a+1 + \frac{-4a+1}{a-1} = \frac{a^2-1-4a+1}{a-1} = \frac{a(a-4)}{a-1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a-4}{a-1}} \end{aligned}$$

¹ 2^af-1^af ; 3^af-1^af .

² Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 4°).

³ $1^af \cdot (-1)$; $3^af+2 \cdot 2^af$.

⁴ Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 2.

⁵ 2^af+1^af .

⁶ Ya que la última ecuación es incompatible.

⁷ Factorizamos el numerador.

Ejercicio 6: Dadas las matrices A y B , halla $(A \cdot B)^{-1}$ y $(A \cdot B)^n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,3 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & -1+0+1 \\ 3-2+0 & -3+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Aplicamos el método de Gauss para hallar la inversa de $A \cdot B$:¹

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 1-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $(A \cdot B)^n$:

$$(A \cdot B)^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$(A \cdot B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

¹ También puede hacerse mediante determinantes.

² $2^a f - 1^a f$.

Ejercicio 7: Halla la recta que pasa por el punto P, es paralela al plano π y corta a la recta r:

$$P(0,1,2) \quad \pi \equiv y-z=0 \quad r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases} \quad (1,3 \text{ PUNTOS})$$

* * *

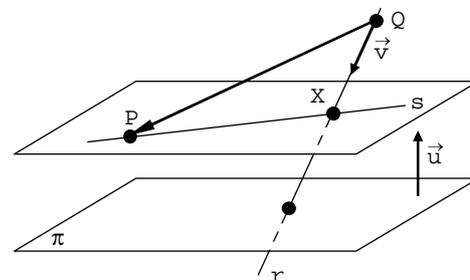
Solución:

Si la recta s es paralela al plano π , el vector característico de éste, $\vec{u}=(0,1,-1)$, es perpendicular a la recta s.

Si la recta s pasa por el punto P y corta a la recta r, se encuentra situada en el plano determinado por P y r. Por tanto, también el vector característico de este plano es perpendicular a s.

Ahora bien, una determinación lineal de la recta r es la siguiente:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(1,0,0) \\ \vec{v}=(-1,1,0) \end{cases}$$



En consecuencia, un vector característico del plano determinado por el punto P y la recta r es:

$$\vec{w} = \vec{v} \wedge [\vec{QP}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

Por tanto, un vector direccional de la recta s es:

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = 2(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

Como la recta s pasa por el punto $P(0,1,2)$, su ecuación continua es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

* * *

También puede calcularse s como la intersección del plano que pasa por P y es paralelo a π con el plano que determinan P y r.¹ O hallando el punto X como intersección de la recta r y el plano que pasa por P y es paralelo a π . Este punto también puede calcularse teniendo en cuenta que el vector $[\vec{PX}]$ es perpendicular a \vec{u} .

¹ Este segundo plano queda determinado, evidentemente, por el punto Q y los vectores \vec{v} y $[\vec{QP}]$, pero también puede calcularse teniendo en cuenta que es el plano del haz de arista r, $\alpha(x+y-1)+\beta z=0$, que pasa por P.

Ejercicio 8: Calcula la distancia del eje de abscisas a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Si r es la recta dada, una determinación lineal suya es:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} P(1, -3, 2) \\ \vec{u} = (2, -1, 1) \end{cases}$$

Como el eje OX pasa por $O(0,0,0)$ y tiene a $\vec{i}(1,0,0)$ por vector direccional, las rectas no son paralelas, ya que sus vectores direccionales no son colineales.

Por tanto:

$$d(r, OX) = \frac{|[[\vec{OP}], \vec{u}, \vec{i}]]|}{|\vec{u} \wedge \vec{i}|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{|-3+2|}{|\vec{j}+\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$