1) (2p) Estudia el comportamiento de la función $f(x)=x\cdot e^x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

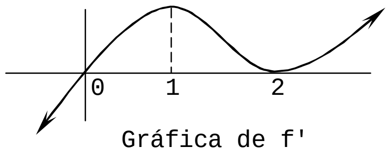
2) (2p) De la función f se pide (la gráfica que está dibujada es la de su derivada):

a) Intervalos de monotonía.

b) Extremos relativos.

c) Intervalos de concavidad y convexidad.

d) Puntos de inflexión.



Gráfica de f'

3) (1p) Encuentra la ecuación implícita de la recta tangente a la curva $2y=1+xy^3$ en el punto de ordenada 1.

4) (1p) Halla la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{x\cdot \ln x}$$

5) (1,5p) Calcula el área de la región del plano limitada por los ejes coordenados y la gráfica de la función $y=(x+2)\cdot e^x$.

6) (1,2p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+(1-a)y=-1 \\ -ax+(a^2-a)y=1 \end{array}\right\}$$

7) (1,3p) Dada la matriz A, halla a, b y c si se sabe que $A^{-1}=A'$:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: *Estudia el comportamiento de la función $f(x)=x\cdot e^x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.* *(2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=R.

2º) La recta y=0 es asíntota horizontal de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^x)\overset{1}{=}\lim_{x\to+\infty}(-x\cdot e^{-x})\overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x}\overset{3}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x}=\frac{-1}{e^{+\infty}}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=x\cdot e^x-0=x\cdot e^x$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que e^x es positiva, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

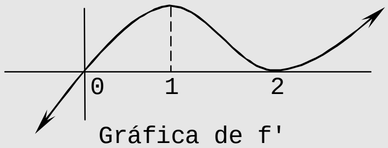
3º) La función tiene en $+\infty$ una rama parabólica en la dirección del eje OY:

$$k=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^x)=(+\infty\cdot e^{+\infty})=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^x=e^{+\infty}=+\infty$$

[1] Ya que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)$.
[2] Transformamos la indeterminación $-\infty\cdot 0$ en la indeterminación $-\infty/+\infty$.
[3] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 2: *De la función f se pide (la gráfica que está dibujada es la de su derivada):* ***a)*** *intervalos de monotonía;* ***b)*** *extremos relativos;* ***c)*** *intervalos de concavidad y convexidad;* ***d)*** *puntos de inflexión.*



Gráfica de f'

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Aplicamos el criterio de la derivada primera (para el estudio de la monotonía):

Intervalos	(-∞,0)	(0,2)	(2,+∞)
f' es	-	+	+
f es	decreciente	creciente	creciente

Como la función f es continua en x=0 y en x=2 (por ser derivable en ambos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, la función tiene un mínimo en x=0 y es creciente en x=2. Por tanto, es creciente en el intervalo (0,+∞).

2º) Aplicamos el criterio de la derivada primera (para el estudio de la curvatura y los puntos de inflexión):

Intervalos	(-∞,1)	(1,2)	(2,+∞)
f' es	creciente	decreciente	creciente
f es	convexa	cóncava	convexa

Como la función f' tiene extremos relativos en x=1 y x=2, f tiene puntos de inflexión en x=1 y x=2.

Ejercicio 3: *Encuentra la ecuación implícita de la recta tangente a la curva $2y=1+xy^3$ en el punto de ordenada 1.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la abscisa del punto de tangencia:

$$2y=1+xy^3 \stackrel{1}{\Rightarrow} 2=1+x \Rightarrow x=1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:[2]

$$2y=1+xy^3 \Rightarrow 2y'=y^3+3xy^2y'$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$2y'=y^3+3xy^2y' \stackrel{3}{\Rightarrow} 2y'=1+3y' \Rightarrow y'=-1$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	-1

4º) Por tanto, la ecuación implícita de la recta tangente es:

$$y-1=-1\cdot(x-1) \Rightarrow y-1=-x+1 \Rightarrow x+y-2=0$$

[1] Ya que y=1.
[2] Por el método de derivación implícita.
[3] Ya que x=1 e y=1.

Ejercicio 4: *Halla la siguiente integral:*

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \cdot dx \overset{1}{=} \int \frac{1/x}{\ln x} \cdot dx \overset{2}{=} \ln|\ln x| + C$$

Comprobación:

$$(\ln|\ln x|)' = \frac{1}{|\ln x|} \cdot |\ln x|' = \frac{1}{|\ln x|} \cdot \frac{|\ln x|}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

[1] Dividimos numerador y denominador por x.

[2] Se trata de una integral casi inmediata de tipo logarítmico. También puede hacerse con el cambio de variable lnx=t, (1/x)·dx=dt.

Ejercicio 5: *Calcula el área de la región del plano limitada por los ejes coordenados y la gráfica de la función $y=(x+2)\cdot e^x$.* *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=(x+2)\cdot e^x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (x+2)\cdot e^x=0 \overset{1}{\Rightarrow} x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

2º) Averiguamos entre -2 y 0 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
-1	1/e	0

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-2}^{0}[(x+2)\cdot e^x-0]\cdot dx=\int_{-2}^{0}(x+2)\cdot e^x\cdot dx \overset{2}{=} [(x+1)e^x]_{-2}^{0}=(1\cdot e^0)-(-1\cdot e^{-2})=1+e^{-2}$$

* * *

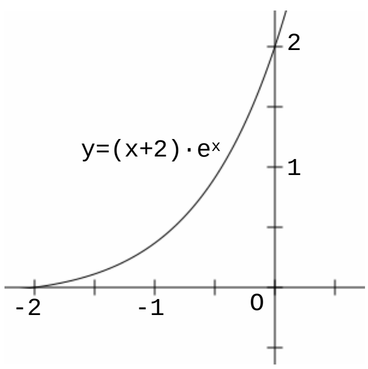
$$\int(x+2)\cdot e^x\cdot dx \overset{3}{=} (x+2)\cdot e^x - e^x + C=(x+2-1)\cdot e^x+C=(x+1)\cdot e^x+C$$

S	D	I
+	x+2	e^x
-	1	e^x
+	0	e^x

Comprobación:

$$[(x+1)\cdot e^x]'=e^x+(x+1)\cdot e^x=(x+2)\cdot e^x$$

Representación gráfica:



[1] Ya que e^x es siempre positivo.
[2] Calculamos la correspondiente integral indefinida aparte.
[3] Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son inmediatas de tipo exponencial.

Ejercicio 6: *Discute y resuelve, en su caso, el sistema:*

$$\left.\begin{array}{l} x+(1-a)y=-1 \\ -ax+(a^2-a)y=1 \end{array}\right\}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-a & -1 \\ -a & a^2-a & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1-a} \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} 1-a=0 \Rightarrow a=1$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[3]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\alpha \end{cases}$$

2º) Si $a \neq 1$, el sistema es incompatible.

[1] 2ªf+a·1ªf.

[2] Si $1-a \neq 0$, el sistema es incompatible. Estudiamos primero los demás casos.

[3] Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

Ejercicio 7: *Dada la matriz A, halla a, b y c si se sabe que $A^{-1}=A'$:*

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$A\cdot A^{-1}=I \overset{1}{\Rightarrow} A\cdot A'=I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & ab+c \\ ab+c & b^2+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \\ ab+c=0 \\ ab+c=0 \\ b^2+c^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=0 \\ ab+c=0 \\ b^2+c^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=\pm 1 \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Ya que $A^{-1}=A'$.