1) (2p) Estudia la continuidad y halla las asíntotas de la función:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{3^{1/x}+1} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

2) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$y=\sqrt{1+x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

3) (1,5p) De todos los conos de generatriz $\sqrt{3}$ calcula el volumen del que lo tiene máximo.

4) (2p) Calcula:

$$\int (1+\operatorname{tg} x)^2\cdot dx \qquad\qquad \int (x^2+5x+6)\cdot\cos x\cdot dx$$

5) (1,5p) Estudia, según los valores de k, el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 1+k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) (1,5p) Halla X:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1: *Estudia la continuidad y halla las asíntotas de la función:*

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{3^{1/x}+1} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(g)=R.

2º) La función es continua en su dominio, por tanto, no tiene asíntotas verticales:

- Si $a\neq 0$: $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{3^{1/x}+1}=\dfrac{a}{3^{1/a}+1}=g(a)$

- Si a=0:

$$g(0)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x}{3^{1/x}+1}=\frac{0}{3^{1/0^-}+1}=\frac{0}{3^{-\infty}+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{3^{1/x}+1}=\frac{0}{3^{1/0^+}+1}=\frac{0}{3^{+\infty}+1}=\frac{0}{+\infty+1}=\frac{0}{+\infty}=0$$

3º) La recta y=x/2-(ln 3)/4 es asíntota oblicua de g en +∞ y -∞:

- $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{3^{1/x}+1}=\dfrac{\pm\infty}{3^{1/\pm\infty}+1}=\dfrac{\pm\infty}{3^0+1}=\dfrac{\pm\infty}{1+1}=\pm\infty$

- $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{3^{1/x}+1}=\dfrac{1}{3^{1/\pm\infty}+1}=\dfrac{1}{3^0+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

- $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x}{3^{1/x}+1}-\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-x-x\cdot 3^{1/x}}{2\cdot(3^{1/x}+1)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x(1-3^{1/x})}{2\cdot(3^{1/x}+1)}\overset{1}{=}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}[x(1-3^{1/x})]}{2\cdot(3^{1/\pm\infty}+1)}\overset{2}{=}\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(1-3^{1/x})}{1/x}}{2\cdot(3^0+1)}\overset{3}{=}\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3^{1/x}\cdot\ln 3\cdot(1/x)'}{(1/x)'}}{2\cdot(1+1)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}[-3^{1/x}\cdot\ln 3]}{4}=\frac{-3^{1/\pm\infty}\cdot\ln 3}{4}=\frac{-3^0\cdot\ln 3}{4}=\frac{-\ln 3}{4}$$

---

[1] Por las propiedades de los límites.
[2] Transformamos la indeterminación ∞·0 en 0/0. También puede hacerse utilizando el hecho de que, si f es un infinitésimo, $e^f-1\sim f$, ya que $1-3^{1/x}=1-e^{(1/x)\cdot\ln 3}=-(e^{(1/x)\cdot\ln 3}-1)$.
[3] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 2: *Deriva y simplifica la función:*

$$y=\sqrt{1+x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$ (1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$y'=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot x-(1+\sqrt{1+x^2})\cdot 1}{x^2}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}\overset{1}{=}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x^2-\sqrt{1+x^2}-1-x^2}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{-(1+\sqrt{1+x^2})}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{x^2+1}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

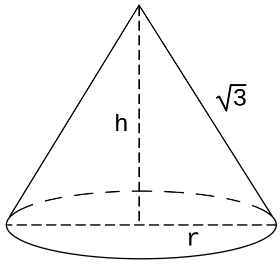
1 Multiplicamos el numerador y el denominador de la última fracción por $\sqrt{1+x^2}$.

Ejercicio 3: *De todos los conos de generatriz $\sqrt{3}$ calcula el volumen del que lo tiene máximo.* *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Sean h y r, respectivamente, la altura y el radio de la base del cono:



El volumen tiene que ser máximo:

$$V=\frac{1}{3}\cdot \pi r^2 h$$

Tenemos que expresar el volumen en función de una sola variable:

$$3=h^2+r^2 \Rightarrow r^2=3-h^2 \Rightarrow V=\frac{1}{3}\cdot \pi(3-h^2)h=\frac{3\pi h-\pi h^3}{3}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$V'=\frac{3\pi-3\pi h^2}{3}=\pi-\pi h^2=0 \Rightarrow \pi=\pi h^2 \Rightarrow h^2=1 \overset{1}{\Rightarrow} h=1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[2] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en h=1:

$$V''=-2\pi h \Rightarrow V''(1)=-2\pi<0 \Rightarrow V \text{ es máximo en } h=1$$

Por último:

$$h=1 \Rightarrow r^2=3-1=2 \Rightarrow r=\pm\sqrt{2} \overset{3}{\Rightarrow} r=\sqrt{2} \Rightarrow V=\frac{2\pi}{3}$$

1 Ya que h>0.
2 También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.
3 Ya que r>0.

Ejercicio 4: Calcula:

$$\int (1+\operatorname{tg} x)^2 \cdot dx \qquad \int (x^2+5x+6)\cdot \cos x \cdot dx$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\int (1+\operatorname{tg} x)^2 \cdot dx = \int (1+2\cdot \operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x)\cdot dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot dx + 2\cdot \int \operatorname{tg} x \cdot dx \overset{1}{=}$$

$$= \operatorname{tg} x + 2\cdot \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot dx = \operatorname{tg} x - 2\cdot \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot dx \overset{2}{=} \operatorname{tg} x - 2\cdot \ln|\cos x| + C$$

Comprobación:

$$(\operatorname{tg} x - 2\cdot \ln|\cos x|)' = 1+\operatorname{tg}^2 x - 2\cdot \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1+\operatorname{tg}^2 x + 2\cdot \operatorname{tg} x = (1+\operatorname{tg} x)^2$$

b)

$$\int (x^2+5x+6)\cdot \cos x \cdot dx \overset{3}{=} (x^2+5x+6)\cdot \operatorname{sen} x + (2x+5)\cdot \cos x - 2\cdot \operatorname{sen} x + C =$$

$$= (x^2+5x+4)\cdot \operatorname{sen} x + (2x+5)\cdot \cos x + C$$

S	D	I
+	x^2+5x+6	$\cos x$
-	$2x+5$	$\operatorname{sen} x$
+	2	$-\cos x$
-	0	$-\operatorname{sen} x$

Comprobación:

$$[(x^2+5x+4)\cdot \operatorname{sen} x + (2x+5)\cdot \cos x]' =$$

$$= (2x+5)\cdot \operatorname{sen} x + (x^2+5x+4)\cdot \cos x + 2\cdot \cos x - (2x+5)\cdot \operatorname{sen} x =$$

$$= (x^2+5x+6)\cdot \cos x$$

1 La primera integral es inmediata de tipo tangente.

2 La integral es casi inmediata de tipo logaritmo. También puede hacerse con el cambio de variable $\cos x = t$, $-\operatorname{sen} x \cdot dx = dt$.

3 Esta integral se hace por partes. Las integrales realizadas en la columna I son inmediatas de tipo seno y coseno.

Ejercicio 5: *Estudia, según los valores de k, el rango de la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 1+k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 1+k & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k \\ 0 & -k & -1-k \end{pmatrix} \overset{2}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{k} & 2k \\ 0 & 0 & \mathbf{k-1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=0, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2º) Si k=1, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3º) En los demás casos el rango de A es 3.

1 3ªf-(1+k)·1ªf.
2 3ªf+2ªf.
3 2ªf↔3ªf.

Ejercicio 6: *Halla X:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{6}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ -1/4 & 1 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ -1/4 & 1 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & -3+0+1 & 2+0+0 \\ 1/2-1/2+0 & 0+2+0 & -3/2+5/2+1 & 1+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * *

Si A·X=B es la ecuación dada, también puede resolverse dicha ecuación hallando primero la inversa de A por el método de Gauss y despejando X:

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

1 1ªf↔2ªf.
2 2ªf-2·1ªf.
3 2ªf+3ªf; 1ªf-3ªf.
4 1ªf·2.
5 1ªf+2ªf.
6 1ªf·1/2; 2ªf·(-1/4).