14 de marzo de 2002.[1]

1) Calcula:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}-1}$$

2) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\ln(x^2+\ln x)$ en el punto de abscisa 1.

3) Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2}$$

4) Calcula el área de la región del plano que determinan en el primer cuadrante las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=-x^2+2x$.

5) Discute y resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay=1 \\ x+a^2y=a+1 \end{array}\right\}$$

6) Estudia el rango de la matriz A según sea el valor del parámetro k:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

[1] Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: *Calcula:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}-1}$$

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}-1} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x}{-x/2} = \lim_{x\to 0}(-2) = -2$$

[1] Ya que, si f es un infinitésimo, $\operatorname{sen} f \sim f$ y $\sqrt[n]{1+f}-1 \sim f/n$. También puede hacerse multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador y teniendo en cuenta luego que, en x=0, $\operatorname{sen} x \sim x$. O por L'Hôpital.

Ejercicio 2: *Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\ln(x^2+\ln x)$ en el punto de abscisa 1.*

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(1)=\ln(1+\ln 1)=\ln 1=0$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:

$$y'=\frac{2x+1/x}{x^2+\ln x}\overset{1}{=}\frac{2x^2+1}{x^3+x\cdot\ln x}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(1)=\frac{2+1}{1+\ln 1}=\frac{3}{1}=3$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	0	3

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-0=3\cdot(x-1)\Rightarrow y=3x-3$$

[1] Multiplicamos numerador y denominador por x.

Ejercicio 3: *Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función:*

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2}$$

* * *

Solución:

Para estudiar la concavidad y la convexidad aplicamos el criterio de la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{x^2-(x+1)2x}{x^4}=\frac{x-2(x+1)}{x^3}=\frac{x-2x-2}{x^3}=\frac{-x-2}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''=\frac{-x^3-(-x-2)3x^2}{x^6}=\frac{-x+3(x+2)}{x^4}=\frac{2x+6}{x^4}=\frac{2(x+3)}{x^4}$$

Intervalos	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,+\infty)$
f" es	-	+	+
f es	cóncava	convexa	convexa

Como la función f' es continua en x=-3 (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,[1] la función tiene un punto de inflexión en x=-3, cuya ordenada es y=(-3+1)/9=-2/9.

[1] El estudio del punto de inflexión también puede hacerse con el criterio de la derivada tercera.

Ejercicio 4: *Calcula el área de la región del plano que determinan en el primer cuadrante las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=-x^2+2x$.*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=-x^2+2x \end{cases} \Rightarrow x^3=-x^2+2x \Rightarrow x^3+x^2-2x=0 \Rightarrow x(x^2+x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

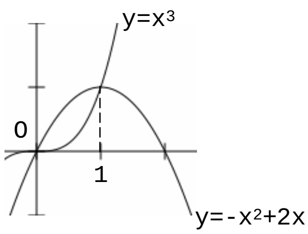
x	y_1	y_2
1/2	1/8	3/4

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^1(-x^2+2x-x^3)\cdot dx \overset{1}{=} \left[-\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}\right)-0=\frac{-4+12-3}{12}=\frac{5}{12}$$

Representación gráfica:



[1] Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 5: *Discute y resuelve el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} x+ay=1 \\ x+a^2y=a+1 \end{array}\right\}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a+1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & a & 1 \\ 0 & \mathbf{a^2-a} & a \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[3]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=1, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay=1 \\ (a^2-a)y=a \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{a}{a(a-1)} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-ay=1-\frac{a}{a-1}=\frac{a-1-a}{a-1} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{a-1}}$$

1 2ªf-1ªf.

2 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

3 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

4 Ya que la última ecuación es incompatible.

Ejercicio 6: *Estudia el rango de la matriz A según sea el valor del parámetro k:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & k & -1\\ k & 0 & k\end{pmatrix}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & k & -1\\ k & 0 & k\end{pmatrix} \overset{1}{\approx} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & k & -1\\ 0 & -2k & k\end{pmatrix} \overset{2}{\approx} \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 2 & 0\\ 0 & \mathbf{k} & -1\\ 0 & 0 & \mathbf{k-2}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}k=0\\ k-2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=0\\ k=2\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=0, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \overset{3}{\approx} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2º) Si k=2, el rango de A es 2:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3º) En los demás casos el rango de A es 3.

1 3ªf-k·1ªf.
2 3ªf+2·2ªf.
3 3ªf-2·2ªf.