

1) (1,6p) Halla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

2) (1,8p) Halla la ecuación de la asíntota oblicua que la siguiente función tiene en $-\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

3) (1,6p) La siguiente función:

a) ¿Es continua en $x=0$?

b) ¿Es derivable en $x=0$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4) (1,6p) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = \ln(x + \ln x)$ en el punto de abscisa 1.

5) (1,6p) La altura de un triángulo isósceles mide 5 cm y su base (lado desigual), 12 cm. Halla el punto de la altura que verifica la propiedad de que la suma de sus distancias a los tres vértices es mínima.

6) (1,8p) Demuestra que la función $f(x) = e^{x/2} - x^{3/2}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(0,1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

Ejercicio 1: Halla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

* * *

(1,6 PUNTOS)

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x^3} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{x^3 \cdot \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{x^3 \cdot \cos x} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2/2}{x^3 \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^3 \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

* * *

También puede hacerse como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} &\stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - \cos x}{3x^2} \stackrel{3}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x + 2 \cdot \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{sen} x}{6x} \stackrel{3}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) + 6 \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) + \cos x}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

¹ Multiplicamos numerador y denominador por $\cos x$.

² Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$ y $1 - \cos x \sim x^2/2$.

³ Como sale la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 2: Halla la ecuación de la asíntota oblicua que la siguiente función tiene en $-\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

(1,8 PUNTOS)

Solución:

La recta $y = -x + 1/2$ es la asíntota oblicua de f en $-\infty$:

$$\begin{aligned} \bullet k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} = \sqrt{(-\infty)^2 - (-\infty)} = \sqrt{+\infty + \infty} = +\infty \\ \bullet m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{-x} \stackrel{2}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = -\sqrt{1 + \frac{1}{+\infty}} = -\sqrt{1 + 0} = -1 \\ \bullet b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x} + x) \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \stackrel{3}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \stackrel{4}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{+\infty}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \sqrt{x^2 - x} + x - 1/2 = \sqrt{x^2 - x} - (1/2 - x) \stackrel{5}{=} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 - x + 1/4}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el sustraendo es mayor que el minuendo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

¹ Ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ cuando $x < 0$.

² Ya que, como estamos calculando el límite en $+\infty$, x es positivo. Por tanto: $\sqrt{x^2} = |x| = x$.

³ Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

⁴ Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.

⁵ Ya que, en $-\infty$, como $1/2 - x > 0$, $1/2 - x = |1/2 - x| = \sqrt{(1/2 - x)^2}$.

Ejercicio 3: La siguiente función: **a)** ¿es continua en $x=0$?; **b)** ¿es derivable en $x=0$?:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1,6 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

a) La función es continua en $x=0$:

- $f(0)=1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

b) La función es derivable en $x=0$ y su derivada es $f'(0)=0$:²

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2} \stackrel{4}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} \stackrel{5}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - x^2}{2x(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(1+x^2)} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

¹ Ya que, en $x=0$, $\operatorname{arctg} x \sim x$. También puede hacerse por L'Hôpital.

² Al ser la función derivable en $x=0$, es continua en dicho punto. Por tanto, en este caso, hubiese bastado con hacer sólo este apartado.

³ Multiplicamos numerador y denominador por x .

⁴ Como sale la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital.

⁵ Multiplicamos numerador y denominador por $1+x^2$.

Ejercicio 4: Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\ln(x+\ln x)$ en el punto de abscisa 1. (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(1) = \ln(1+\ln 1) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

2º) Para hallar la pendiente, tenemos que derivar la función:

$$y' = \frac{1}{x+\ln x} \cdot (x+\ln x)' = \frac{1}{x+\ln x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+\ln x} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x \cdot (x+\ln x)}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(1) = \frac{2}{1 \cdot (1+0)} = 2$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	0	2

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-0=2 \cdot (x-1) \Rightarrow y=2x-2$$

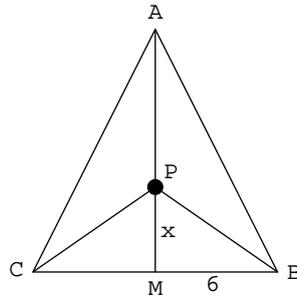
Ejercicio 5: La altura de un triángulo isósceles mide 5 cm y su base (lado desigual), 12 cm. Halla el punto de la altura que verifica la propiedad de que la suma de sus distancias a los tres vértices es mínima.

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sea ABC el triángulo isósceles de base BC=12 cm y altura AM=5 cm, P el punto que andamos buscando y x su distancia a la base:



La suma de las distancias desde P a los tres vértices es mínima:

$$S = PA + PB + PC = 5 - x + \sqrt{36 + x^2} + \sqrt{36 + x^2} = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$S' = -1 + 2 \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{36 + x^2}} = -1 + \frac{2x}{\sqrt{36 + x^2}} = \frac{2x - \sqrt{36 + x^2}}{\sqrt{36 + x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \sqrt{36 + x^2} \Rightarrow 4x^2 = 36 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 12 \stackrel{1}{\Rightarrow} x = 2 \cdot \sqrt{3}$$

Como² $D = \sqrt{36 + x^2} > 0$, para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir³ S'' por N' , donde $N = 2x - \sqrt{36 + x^2}$:

$$N' = 2 - \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{36 + x^2}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} \Rightarrow N'(2 \cdot \sqrt{3}) = 2 - \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{3}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \text{ es mínima en } x = 2 \cdot \sqrt{3}$$

Por tanto, el punto P está situado a una distancia de la base de $2 \cdot \sqrt{3}$ cm.

¹ Ya que $x > 0$.

² Designamos por D al denominador de la derivada y por N al numerador.

³ Ya que los signos de N' y S'' coinciden en $x = 2\sqrt{3}$.

Ejercicio 6: Demuestra que la función $f(x)=e^{x/2}-x^{3/2}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(0,1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

$$f'(x) = e^{x/2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} = \frac{e^{x/2} - 3 \cdot x^{1/2}}{2}$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(0,1)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

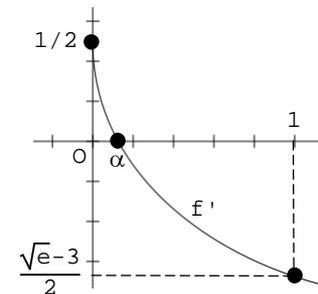
1ª) $f'(0) \cdot f'(1) < 0$:

- $f'(0) = 1/2 > 0$.
- $f'(1) = \frac{e^{1/2} - 3}{2} < 0$.

2ª) f' es continua en $[0,1]$:

- $[0,1] \subset \text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) = [0, +\infty)$.
- Si $a \in [0,1]$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x/2} - 3 \cdot x^{1/2}}{2} = \frac{e^{a/2} - 3 \cdot a^{1/2}}{2} = f'(a)$$



3º) Ahora bien, como f es continua en α , por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α , entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, f tiene en dicho punto un máximo relativo.