

1) (1,6p) Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}} - 1}{x-1}$$

2) (1,6p) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\ln(x-2)}{2-x}$$

3) (2p) La función f :

a) ¿Es continua en $x=0$?

b) ¿Es derivable en $x=0$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4) (1,6p) Determina los coeficientes a y b de modo que la recta $4x+y=8$ sea tangente a la curva $y=ax^3+bx^2+ax+b$ en el punto de ordenada 0.

5) (1,6p) Se quiere fabricar un bote de conserva cilíndrico de un litro de capacidad. Calcula el radio y la altura del bote para que la superficie de metal empleado sea mínima.

6) (1,6p) Demuestra que la función $y=x^3-x-\sin(\pi x)$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1,0)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

Ejercicio 1: Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}} - 1}{x - 1}$$

* * *

(1, 6 PUNTOS)

Solución:

1º) $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$:

$$\begin{cases} 1/x \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

2º) La función f es continua en su dominio, ya que, si $a \in \text{Dom}(f)$:¹

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{a}} - 1}{a - 1} = f(a)$$

3º) La función f tiene una discontinuidad evitable en $x=1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}} - 1}{x - 1} \stackrel{2}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{t} - 1}{t^2 - 1} \stackrel{3}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t}{t(t^2 - 1)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-(t - 1)}{t(t + 1)(t - 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-1}{t(t + 1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

¹ Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

² Hacemos el cambio de variable $x=t^2$. También puede multiplicarse numerador y denominador por $\sqrt{x}$, descomponerse el denominador en factores, $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ y simplificar a continuación. O multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador. O por L'Hôpital.

³ Multiplicamos numerador y denominador por t .

Ejercicio 2: Halla las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\ln(x-2)}{2-x}$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f) = (2, +∞):

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

2º) La recta x=2 es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{\ln(x-2)}{2-x} \stackrel{1}{=} \frac{\ln 0^+}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

3º) La recta y=0 es asíntota horizontal de la función en +∞:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-2)}{2-x} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-2}}{-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{\ln(x-2)}{2-x} - 0 = \frac{\ln(x-2)}{2-x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en +∞, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

¹ Par calcular el límite del numerador aplicamos la regla del límite de la composición.

² Como sale la expresión indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado al numerador la regla del límite de la composición.

Ejercicio 3: La función f : **a)** ¿es continua en $x=0$?; **b)** ¿es derivable en $x=0$?:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

a) La función es continua en $x=0$:

- $f(0)=2$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x - 1} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$

b) La función es derivable en $x=0$ y su derivada es $f'(0)=-1$:²

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{e^x - 1} - 2}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \cdot e^x + 2}{x \cdot (e^x - 1)} \stackrel{4}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \cdot e^x + 2}{x^2} \stackrel{5}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cdot e^x}{2x} \stackrel{6}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot e^x}{2} = \frac{-2 \cdot 1}{2} = -1 \end{aligned}$$

¹ Ya que, en $x=0$, $e^x - 1 \sim x$. También puede hacerse por L'Hôpital.

² Al ser la función derivable en $x=0$, es continua en dicho punto. Por tanto, en este caso, hubiese bastado con hacer sólo este apartado.

³ Multiplicamos numerador y denominador por $e^x - 1$.

⁴ Ya que, en $x=0$, $e^x - 1 \sim x$.

⁵ Como sale la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital.

⁶ Como sale la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital. Si se prefiere, se puede sacar -2 factor común en el numerador y utilizar el hecho de que, en $x=0$, $e^x - 1 \sim x$.

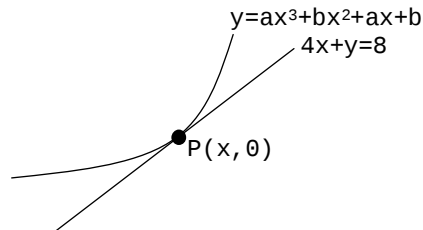
Ejercicio 4: Determina los coeficientes a y b de modo que la recta $4x+y=8$ sea tangente a la curva $y=ax^3+bx^2+ax+b$ en el punto de ordenada 0.

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sea $P(x,0)$ el punto de tangencia:



Como el punto P está en la recta tangente, satisface su ecuación:

$$4x+0=8 \Rightarrow x=2$$

Como la pendiente de la recta tangente es -4 , podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'
2	0	-4

Si $y=ax^3+bx^2+ax+b$, entonces $y'=3ax^2+2bx+a$.

Como los puntos $P(2,-4)$ y $(2,0)$ pertenecen, respectivamente, a las gráficas de las funciones y' e y , tenemos lo siguiente:

$$y'(2)=-4 \Rightarrow 12a+4b+a=-4 \Rightarrow 13a+4b=-4$$

$$y(2)=0 \Rightarrow 8a+4b+2a+b=0 \Rightarrow 10a+5b=0 \Rightarrow 2a+b=0$$

Por último, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 13a+4b=-4 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13a+4b=-4 \\ b=-2a \end{cases} \Rightarrow 13a-8a=-4 \Rightarrow 5a=-4 \Rightarrow a=-4/5 \Rightarrow b=8/5$$

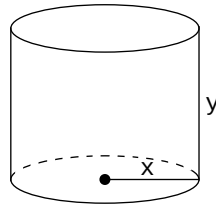
Ejercicio 5: Se quiere fabricar un bote de conserva cilíndrico de un litro de capacidad. Calcula el radio y la altura del bote para que la superficie de metal empleado sea mínima.

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sean x e y , respectivamente, el radio de la base y la altura del cilindro:



El área total del cilindro tiene que ser mínima:

$$A = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable. Ahora bien, como el volumen del cilindro es de 1 litro:

$$1 = \pi x^2 y \Rightarrow y = \frac{1}{\pi x^2} \Rightarrow A = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2}{x}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A' = \frac{6\pi x^2 \cdot x - (2\pi x^3 + 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 2}{x^2} = 0 \Rightarrow 4\pi x^3 = 2 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow x = 1/\sqrt[3]{2\pi}$$

Como¹ $D = x^2 > 0$, para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir² A'' por N' , donde $N = 4\pi x^3 - 2$:

$$N' = 12\pi x^2 \Rightarrow N'(1/\sqrt[3]{2\pi}) = 12\pi \cdot 1/\sqrt[3]{4\pi^2} > 0 \Rightarrow A \text{ es mínima en } x = 1/\sqrt[3]{2\pi}$$

Por tanto,³ $x = 1/\sqrt[3]{2\pi}$ dm e $y = \frac{1}{\pi \cdot 1/\sqrt[3]{4\pi^2}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} = \sqrt[3]{4/\pi}$ dm.

¹ Designamos por D al denominador de la derivada y por N al numerador.

² Ya que los signos de N' y A'' coinciden en $x = 1/\sqrt[3]{2\pi}$.

³ Un litro es 1 dm³.

Ejercicio 6: Demuestra que la función $y=x^3-x-\sin(\pi x)$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1,0)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 - \pi \cdot \cos(\pi x)$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(-1,0)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

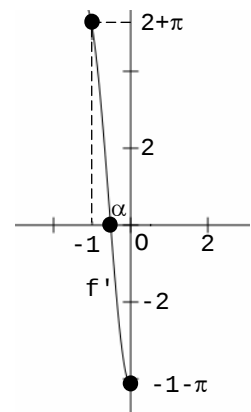
1ª) $f'(-1) \cdot f'(0) < 0$:

- $f'(-1) = 3 - 1 + \pi = 2 + \pi > 0$.
- $f'(0) = -1 - \pi < 0$.

2ª) f' es continua en $[-1,0]$:

- $[-1,0] \subset \text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Si $a \in [-1,0]$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} [3x^2 - 1 - \pi \cdot \cos(\pi x)] \stackrel{1}{=} 3a^2 - 1 - \pi \cdot \cos(\pi a) = f'(a)$$



3º) Ahora bien, como f es continua en α , por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α , entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, f tiene en dicho punto un máximo relativo.

¹ Para calcular el límite de $\cos(\pi x)$ hemos utilizado la regla del límite de la composición.