

14 de diciembre de 2007.

1) (1p) Halla k para que la siguiente función sea continua en el punto $x=2$:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{|x-2|} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

2) (2,4p) De la siguiente función, se pide:

a) El estudio de la continuidad y la clasificación de sus discontinuidades

b) Las ecuaciones de sus asíntotas y el estudio de la posición relativa.

$$f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$$

3) (1,6p) Prueba que la ecuación $e^x + 2x = 2$ tiene solo una solución. Hállala con dos cifras decimales exactas.

4) (1,6p) De la siguiente función, se pide:

a) Su derivada simplificada.

b) La ecuación explícita de la recta tangente en el punto de abscisa $\pi/4$.

$$f(x) = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + \ln \operatorname{tg} x$$

5) (1,6p) Comprueba que la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[-2, 1]$ y halla el valor intermedio que lo verifica.

6) (1,8p) Halla el punto de inflexión de la función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ si ésta tiene un extremo en $x=1$ y la tangente en el punto de abscisa 0 es la recta $15x - y + 3 = 0$.

Ejercicio 1: Halla k para que la siguiente función sea continua en el punto $x=2$:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{|x-2|} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

El límite de la función f en 2 debe coincidir con $f(2)$:

- $f(2) = k$

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{1}{|x-2|} \stackrel{1}{=} \operatorname{arctg} \frac{1}{0^+} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \pi/2$

Por tanto:

$$k = \pi/2$$

¹ Aplicamos la regla del límite de la composición.

Ejercicio 2: De la siguiente función, se pide: **a)** el estudio de la continuidad y la clasificación de sus discontinuidades; **b)** las ecuaciones de sus asíntotas y el estudio de la posición relativa.

$$f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$$

(2,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que si $a \in \text{Dom}(f)$:¹

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\ln a}{1-a} = f(a)$$

3º) La recta $x=0$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

4º) La función tiene una discontinuidad evitable en $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$$

5º) La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1-x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{-1} = \frac{1/+\infty}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{1-x} - 0 = \frac{\ln x}{1-x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el numerador es positivo y el denominador negativo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

¹ Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.

² Como sale la indeterminación $0/0$, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse con el cambio de variable $x=1+t$, utilizando luego el hecho de que, en $t=0$, $\ln(1+t) \sim t$.

³ Como sale la indeterminación ∞/∞ , aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 3: Prueba que la ecuación $e^x+2x=2$ tiene solo una solución. Hállala con dos cifras decimales exactas.

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

Consideramos la función $f(x)=e^x+2x-2$.

Esta función es continua en \mathbb{R} por ser derivable en \mathbb{R} :

$$f'(x)=e^x+2$$

Como $f(0)=-1<0$ y $f(1)=e>0$, estudiamos el signo de la función en valores intermedios hasta dar con un intervalo de una centésima de longitud en cuyos extremos la función tenga signos distintos:

x	0	1	0,5	0,3	0,4	0,35	0,32	0,31
y	-	+	+	-	+	+	+	-

Como f es continua en $[0,31;0,32]$ y $f(0,31) \cdot f(0,32) < 0$, por el teorema de Bolzano existe c en $(0,31;0,32)$ tal que $f(c)=0$.

Ahora bien:

$$f(c)=0 \Rightarrow e^c+2c-2=0 \Rightarrow e^c+2c=2$$

En consecuencia, c es solución de la ecuación. Y como c pertenece al intervalo $(0,31;0,32)$, $c=0,31$...

Que la solución es única es una consecuencia del hecho de que la función f es continua y creciente en \mathbb{R} , ya que su derivada es siempre positiva. Por tanto, no puede cortar dos veces al eje de abscisas.

* * *

Otra forma de ver esto último es la siguiente.

Supongamos que dicha ecuación tiene más de una solución. Sean a y b ($a < b$) dos de esas soluciones. En ese caso, $e^a+2a-2=0$ y $e^b+2b-2=0$.

Ahora bien, la derivada de la función $f(x)=e^x+2x-2$ es $f'(x)=e^x+2$. Por tanto, f es continua en el cerrado $[a,b]$ por ser derivable en \mathbb{R} , es derivable en el abierto (a,b) por serlo en \mathbb{R} y $f(a)=f(b)=0$. Por el teorema de Rolle existe c en (a,b) tal que $f'(c)=e^c+2=0$. Pero $e^c+2 > 0$. Como ambas cosas no pueden ser ciertas a la vez, la ecuación $e^x+2x-2=0$ sólo tiene una solución real.

Ejercicio 4: De la siguiente función, se pide: **a)** su derivada simplificada; **b)** la ecuación explícita de la recta tangente en el punto de abscisa $\pi/4$.

$$f(x) = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + \ln \operatorname{tg} x \quad (1,6 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

1º) Calculamos la derivada de la función:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-1 \cdot 4 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{4\operatorname{sen}^4 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x} \end{aligned}$$

2º) Hallamos la ordenada del punto de tangencia:

$$f(\pi/4) = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2(\pi/4)} + \ln \operatorname{tg}(\pi/4) = -\frac{1}{2(\sqrt{2}/2)^2} + \ln 1 = -\frac{1}{2 \cdot 1/2} = -1$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$f'(\pi/4) = \frac{1}{\operatorname{sen}^3(\pi/4) \cdot \cos(\pi/4)} = \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^4} = \frac{1}{4/16} = 4$$

Resumiendo:

x	y	y'
$\pi/4$	-1	4

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y+1=4 \cdot (x-\pi/4) \Rightarrow y+1=4x-\pi \Rightarrow y=4x-\pi-1$$

Ejercicio 5: Comprueba que la función $f(x)=x-x^3$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[-2,1]$ y halla el valor intermedio que lo verifica. (1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Derivamos la función:

$$f'(x)=1-3x^2$$

2º) La función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange:

1ª) f es continua en $[-2,1]$ por ser derivable en \mathbb{R} .

2ª) f es derivable en $(-2,1)$ por serlo en \mathbb{R} .

Por tanto, existe α en el intervalo abierto $(-2,1)$ tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{0-6}{3}=-2$$

Ahora bien:

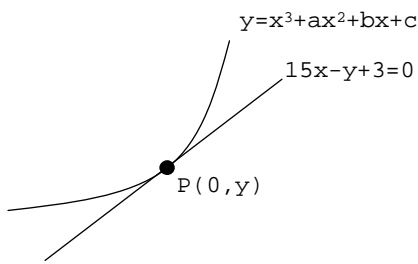
$$f'(\alpha)=-2 \Rightarrow 1-3\alpha^2=-2 \Rightarrow 3=3\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\pm 1 \stackrel{1}{\Rightarrow} \alpha=-1$$

¹ Ya que α pertenece al intervalo abierto $(-2,1)$.

Ejercicio 6: Halla el punto de inflexión de la función $y=x^3+ax^2+bx+c$ si ésta tiene un extremo en $x=1$ y la tangente en el punto de abscisa 0 es la recta $15x-y+3=0$.

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la recta $15x-y+3=0$ es tangente a la gráfica de la función en el punto $P(0,y)$, éste satisface su ecuación:

$$15 \cdot 0 - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Teniendo en cuenta además la condición necesaria de extremo relativo y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 0 es 15, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'
1		0
0	3	15

Como $y=x^3+ax^2+bx+c$, entonces $y'=3x^2+2ax+b$.

Como el punto $(0,3)$ pertenece a la gráfica de la función y , y los puntos $(0,15)$ y $(1,0)$ pertenecen a la gráfica de la función y' , tenemos lo siguiente:

$$y(0)=3 \Rightarrow c=3$$

$$y'(0)=15 \Rightarrow b=15$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \stackrel{1}{\Rightarrow} 2a=-18 \Rightarrow a=-9$$

Por tanto, $y=x^3-9x^2+15x+3$, $y'=3x^2-18x+15$, $y''=6x-18=6(x-3)$ e $y'''=6$.

Ahora bien, como la condición necesaria de punto de inflexión es que la derivada segunda se anule, $x=3$ es un posible punto de inflexión. Y como $y'''(3)=6 \neq 0$, por el criterio de la derivada tercera resulta que el punto de abscisa $x=3$ y ordenada $y=27-81+45+3=-6$ es punto de inflexión.

¹ Ya que $b=15$.