1) (3p) Calcula:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+4}}{x-3}$$

2) (2p) Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3^x+3^{1/x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

3) (2p) Averigua si la siguiente función es derivable en x=0:

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x\le 0\\ e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

4) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\cdot\ln\frac{x-1}{x+1}$$

5) (1,5p) Halla la ecuación general de la recta tangente a la cónica $y^2=x$ trazada desde el punto (0,-1).

[1] Al no disponer de este examen, se ha sustituido por otro. La fecha también es ficticia.

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{sen(2x)}{e^x} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+4}}{x-3}$$

(3 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{sen(2x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e^x}\cdot sen(2x)\right]=0$$

Ya que se trata del producto de un infinitésimo por una función acotada:

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$
- $-1\leq sen(2x)\leq 1$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+4}}{x-3}\overset{1}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+4}}{-x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{-x-3}\overset{2}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\cdot\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{-x-3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}{x\cdot\left(-1-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{-1-\frac{3}{x}}=\frac{0-\sqrt{1+0}}{-1-0}=\frac{-1}{-1}=1$$

---

[1] Ya que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)$. Si se calcula el límite sin aplicar esta fórmula, hay que tener presente que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ cuando $x<0$.

[2] Ya que, como estamos calculando el límite en $+\infty$, x es positivo. Por tanto: $\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Ejercicio 2: *Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3^x+3^{1/x^2}} & si\ \ x\neq 0 \\ 1 & si\ \ x=0 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=R.

2º) La función f es continua en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, ya que si $a\neq 0$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{3^x+3^{1/x^2}} = \frac{1}{3^a+3^{1/a^2}} = f(a)$$

3º) La función f tiene una discontinuidad evitable en x=0 y, por tanto, carece de asíntotas verticales:

- $f(0)=1$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3^x+3^{1/x^2}} = \frac{1}{3^0+3^{1/0^+}} = \frac{1}{1+3^{+\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = 0$

4º) Las rectas y=1 e y=0 son asíntota horizontales de la función f en $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)= \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{3^x+3^{1/x^2}} = \frac{1}{3^{-\infty}+3^{1/+\infty}} = \frac{1}{0+3^0} = \frac{1}{1} = 1$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{1}{3^x+3^{1/x^2}} - 1 = \frac{1-3^x-3^{1/x^2}}{3^x+3^{1/x^2}} = \frac{(1-3^{1/x^2})-3^x}{3^x+3^{1/x^2}}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es negativo[1] y el denominador positivo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)= \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{3^x+3^{1/x^2}} = \frac{1}{3^{+\infty}+3^{1/+\infty}} = \frac{1}{+\infty+3^0} = \frac{1}{+\infty+1} = 0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{1}{3^x+3^{1/x^2}} - 0 = \frac{1}{3^x+3^{1/x^2}}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $+\infty$, ya que numerador y denominador son positivos[2], la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

[1] La función exponencial de base 3 es siempre positiva y mayor o menor que 1 según sea el exponente positivo o negativo. Observa que, entonces, el paréntesis es negativo.

[2] La función exponencial de base 3 es positiva.

Ejercicio 3: *Averigua si la siguiente función es derivable en x=0:*

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x\leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la función no es continua en x=0, no es derivable en dicho punto:

- $f(0)=0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-x)=0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-x}=e^{0}=1$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar directamente la derivada:

- $f'_{-}(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{-x-0}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-1)=-1$
- $f'_{+}(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{e^{-x}-0}{x}=\dfrac{1}{0^{+}}=+\infty$

La función es derivable en x=0 por la izquierda, pero no es derivable por la derecha y, por tanto, no es derivable en el punto.

Ejercicio 4: *Deriva y simplifica la función:*

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}\,arc\,tg\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\cdot ln\frac{x-1}{x+1}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2+x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}\cdot\frac{2}{x+1}=$$

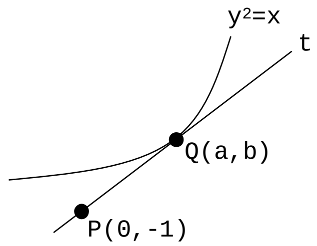
$$=\frac{2}{3(x^2+2)}+\frac{1}{3(x^2-1)}=\frac{2x^2-2+x^2+2}{3(x^2+2)(x^2-1)}=\frac{3x^2}{3(x^2+2)(x^2-1)}=\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$$

Ejercicio 5: *Halla la ecuación general de la recta tangente a la cónica $y^2=x$ trazada desde el punto (0,-1).* (1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

El punto P no pertenece a la curva porque no satisface su ecuación. Sea Q(a,b) el punto de tangencia:



Como el punto Q está en la curva, satisface su ecuación: $b^2=a$.

Como el punto Q está en la recta tangente, satisface su ecuación. Ahora bien, de esta recta sólo conocemos el punto P. Por tanto, su ecuación punto-pendiente es y+1=m(x-0). En consecuencia: b+1=ma.

Por otro lado, la pendiente de la curva en el punto Q es m:

$$y^2=x \Rightarrow 2yy'=1 \overset{1}{\Rightarrow} 2bm=1 \overset{2}{\Rightarrow} m=1/(2b)$$

Por último, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a=b^2 \\ b+1=ma \\ m=1/(2b) \end{cases} \Rightarrow b+1=\frac{1}{2b}\cdot b^2 \Rightarrow 2b+2=b \Rightarrow b=-2 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ m=-1/4 \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación general de la recta tangente es:

$$y+1=-\frac{1}{4}\cdot x \Rightarrow 4y+4=-x \Rightarrow x+4y+4=0$$

---

1 En el punto Q, y=b e y'=m.

2 Ya que b≠0.