1) (3p) Calcula:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\ln\frac{x-1}{x}} \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\left(2-e^{2x}\right)^{1/(e^{x}-1)}$$

2) (2p) Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$$

3) (2p) Calcula el valor de los parámetros a y b para que sea derivable en x=0 la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x\le 0 \\ e^{ax+b} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

4) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x)=2\cdot\text{arc tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

5) (1,5p) Halla la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de la función $y^3-3y^2-yx+3=0$ en el punto de ordenada 3.

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\ln\frac{x-1}{x}} \qquad \lim_{x\to 0}(2-e^{2x})^{1/(e^x-1)}$$

(3 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\ln\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\overset{1}{=}\frac{\ln\frac{1}{+\infty}}{\ln\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)}=\frac{\ln 0^+}{\ln 1^-}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$$

b)

$$\lim_{x\to 0}(2-e^{2x})^{1/(e^x-1)}\overset{2}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}\cdot(2-e^{2x}-1)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{e^x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(e^{2x}-1)}{e^x-1}}\overset{3}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(-e^x-1)}=e^{-2}$$

---

1 Para calcular el límite del numerador y el del denominador aplicamos la regla del límite de la composición.

2 Ya que sale la expresión indeterminada 1^∞.

3 También puede hacerse teniendo en cuenta que $e^f-1\sim f$ si f es un infinitésimo. O por L'Hôpital.

Ejercicio 2: Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$$ (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a\in Dom(f)$:[1]

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{1+e^{1/a}}=f(a)$$

3º) La función tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$ y, por tanto, carece de asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{1+e^{1/0^-}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{1+e^{1/0^+}}=\frac{1}{1+e^{+\infty}}=\frac{1}{1+\infty}=\frac{1}{+\infty}=0$$

4º) La recta $y=1/2$ es asíntota horizontal de la función en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+e^{1/x}}=\frac{1}{1+e^{1/\pm\infty}}=\frac{1}{1+e^{0}}=\frac{1}{1+1}=1/2$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{1}{1+e^{1/x}}-\frac{1}{2}=\frac{2-1-e^{1/x}}{2(1+e^{1/x})}=\frac{1-e^{1/x}}{2(1+e^{1/x})}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $-\infty$, ya que numerador y denominador son positivos,[2] la función se encuentra situada por encima de la asíntota; y como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el numerador es negativo y el denominador positivo,[3] la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.
[2] Si $x<0$, la función exponencial $e^{1/x}$ es positiva y menor que 1.
[3] Si $x>0$, la función exponencial $e^{1/x}$ es mayor que 1.

Ejercicio 3: *Calcula el valor de los parámetros a y b para que sea derivable en x=0 la función:*

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x\le 0 \\ e^{ax+b} & \text{si } x>0 \end{cases}$$ (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Si $x\neq 0$, la derivada de f es:

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ a\cdot e^{ax+b} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Si f es continua[1] en x=0, entonces $a=e^b$:

- $f(0)=a$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x+a)=a$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{ax+b}=e^b$

Si f es derivable en x=0, entonces $a\cdot e^b=1$:

- $f'_-(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1=1$
- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (a\cdot e^{ax+b})=a\cdot e^b$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a=e^b \\ a\cdot e^b=1 \end{cases} \Rightarrow e^b\cdot e^b=1 \Rightarrow e^{2b}=1 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=e^0=1$$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:

- $f'_-(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x+a-a}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1=1$
- $f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{e^{ax+b}-a}{x}=\dfrac{e^b-a}{0^+} \overset{2}{\Rightarrow} e^b-a=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{ax+b}-a}{x} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a\cdot e^{ax+b}}{1}=a\cdot e^b$$

Por tanto, para que la función sea derivable, $a\cdot e^b=1$. Llegamos, pues, al mismo sistema que antes.

[1] Si f es derivable en x=0, debe ser continua en dicho punto.
[2] Si $e^b-a\neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en x=0.
[3] Como $e^b-a=0$, sale la indeterminación 0/0; por tanto, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sustituyendo a por e^b, sacando luego e^b factor común de $e^{ax}-1$ y teniendo en cuenta que $e^f-1\sim 1$ si f es un infinitésimo.

Ejercicio 4: *Deriva y simplifica la función:*

$$f(x)=2\cdot arc\ tg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'=2\cdot\frac{1-x}{1-x+1+x}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=$$

$$=2\cdot\frac{1-x}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{2}{1-x}\overset{1}{=}\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x)(1-x)^2}{1-x}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

[1] Como 1-x>0, ya que Dom(f)=[-1,1), resulta que $1-x=|1-x|=\sqrt{(1-x)^2}$.

Ejercicio 5: *Halla la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de la función $y^3-3y^2-yx+3=0$ en el punto de ordenada 3.*

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la abscisa del punto de tangencia:

$$y^3-3y^2-yx+3=0 \overset{1}{\Rightarrow} 27-27-3x+3=0 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:[2]

$$3y^2y'-6yy'-y'x-y=0$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$3y^2y'-6yy'-y'x-y=0 \overset{3}{\Rightarrow} 27y'-18y'-y'-3=0 \Rightarrow 8y'=3 \Rightarrow y'=3/8$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	3	3/8

4º) Por tanto, la ecuación general de la recta tangente es:

$$y-3=\frac{3}{8}\cdot(x-1) \Rightarrow 8y-24=3x-3 \Rightarrow 3x-8y+21=0$$

[1] Ya que y=3.
[2] Por el método de derivación implícita.
[3] Ya que x=1 e y=3.