Índice: Una consecuencia de la regla de L'Hôpital. Cálculo de la derivada de una función en un punto. Problemas.

1.- Una consecuencia de la regla de L'Hôpital[1]

Si f es continua en x_0, derivable en un entorno reducido de dicho punto y existe el límite de f' en x_0, entonces:

$$f'(x_0) \overset{2}{=} \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

En efecto:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{3}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to x_0} f'(x)$$

* * *

Este resultado nos permite terminar de justificar el método de derivación logarítmica.[4] Habíamos probado por este método que si $x\neq 1$:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$$

Y nos preguntábamos si la fórmula de la derivada que habíamos obtenido era válida también para x=1, esto es, si:

$$f'(1)=\frac{2}{(1+1)^2}$$

Pues bien, la respuesta es que sí, siempre que esa fórmula tenga sentido[5] para x=1 y se cumplan las condiciones de la propiedad que acabamos de demostrar, ya que entonces la derivada de f en x=1 es:

$$\lim_{x\to 1} f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{2}{(1+1)^2}$$

2.- Cálculo de la derivada de una función en un punto

La propiedad anterior nos permite calcular la derivada de una función en un punto de otro modo que aplicando la definición, que es como lo hacíamos en la lección D-2.

* * *

[1] Esta propiedad es cierta también cuando se enuncia con los correspondientes conceptos laterales.
[2] Si este límite es finito, f es derivable (y f' continua) en x_0.
[3] Observa que se cumplen las cuatro condiciones que se requieren para poder aplicar la regla de L'Hôpital.
[4] Ver el apartado 3 de la lección D-7.
[5] Un ejemplo en el que la fórmula de la derivada carece de sentido para el punto que se está estudiando lo tienes al final de esta lección (ya nos hemos encontrado, de todos modos, con esta misma situación en algunos problemas de las lecciones anteriores).

Por ejemplo, calculemos por los dos métodos la derivada en el origen de coordenadas de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ x^3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Si aplicamos la definición de derivada de una función en un punto, necesitamos las derivadas laterales, ya que el comportamiento de la función f es distinto a izquierda y derecha de 0:

- $f'_-(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2-0}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x=0$

- $f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^3-0}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2=0$

Por tanto, f'(0)=0.

* * *

Si aplicamos el resultado visto en el apartado anterior, es necesario dar dos pasos:

1º) Demostrar que la función f es continua en x=0:

- $f(0)=0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2=0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3=0$

2º) Calcular la derivada en x=0. Evidentemente:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 3x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Por tanto:

- $f'_-(0)\overset{1}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (2x)=0$

- $f'_+(0)\overset{2}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (3x^2)=0$

Por tanto, f'(0)=0. En consecuencia:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 3x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Es imprescindible conocer los dos métodos, ya que unas veces es más cómodo aplicar el primero y otras, el segundo.

---

[1] Como f es continua por la izquierda en x=0, derivable en (-∞,0) y existe el límite lateral izquierdo de f' en 0, entonces podemos aplicar la propiedad vista al comienzo de la lección, pero referida aquí a la derivada lateral izquierda.
[2] Idem, pero referida ahora a la derivada lateral derecha.

* * *

Si se usa el segundo método, es necesario probar primero que la función es continua en el punto en el que se quiere calcular la derivada.

Veámoslo mediante otro ejemplo. Calculemos la derivada de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 0 \\ 1+x^3 & \text{si } x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 3x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Sólo falta calcular la derivada en x=0.

Ahora bien, si descuidadamente sólo das el segundo paso, como la derivada a izquierda y derecha de 0 es la misma que en el ejercicio anterior, repitiendo los cálculos resulta que f'(0)=0. Sin embargo, la función no es derivable en x=0, ya que no es continua en dicho punto, como se puede demostrar con facilidad.

Si aplicas el primer método, no se requiere probar la continuidad:

- $f'_-(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2-0}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x=0$
- $f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1+x^3-0}{x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

Esto es, la función no es derivable en x=0, y, por tanto:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 3x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

* * *

Otro ejemplo. Queremos calcular el dominio de derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x)=\cos\sqrt{x}$$

Para ello, calculamos su derivada:

$$f'(x)=-\operatorname{sen}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{-\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Parece, pues, que Dom(f')=(0,+∞).

Sin embargo, Dom(f')=[0,+∞):

$$f'(0)\overset{1}{=}f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}}\overset{2}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$$

[1] También podemos calcular f'(0) aplicando la definición de derivada de una función en un punto.

[2] Ya que sen f ~ f si f es un infinitésimo.

3.- Problemas

1) Calcula el valor del parámetro k para que la siguiente función sea continua en x=0:

$$f(x)=\begin{cases} k & \text{si } x=0 \\ x^x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

2) De las siguientes funciones se quiere saber lo siguiente: a) ¿es continua en x=0?; b) ¿es derivable en x=0?; c) ¿es f' continua en x=0?; d) ¿es f' derivable en x=0?

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

3) Halla el dominio de derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x}\cdot(1-\cos x)$

b) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}\cdot \operatorname{arc\,tg} x$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot(e^{x+1}-1)$

d) $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot(x^n-1)$

4) Calcula:[1]

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos(6x)}{\ln\cos(3x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(ax)-1}{\cos(bx)-1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x\cdot \operatorname{sen}\dfrac{a}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x-\frac{3}{2}\cdot\operatorname{sen}(2x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot e^{2x}-e^{2x}-x+1}{e^{2x}-1}$

j) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x\cdot \operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

n) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot \arccos x\right)$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{tg} x}{x-\operatorname{sen} x}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{sen}^2(x/2)}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x\cdot\operatorname{sen} x}$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2-x)e^x-x-2}{x^3}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x-x+x^3/6}{x^3}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1+x^2/2}{x^2}$

t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x-x+x^3/3}{x^3}$

u) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x-x^2/2}{x^2}$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$

x) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg} x}{1+\cos(4x)}$

y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

z) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)\cdot\operatorname{tg}^2 x}{x\cdot(1-\cos x)}$

[1] Seguimos con los límites de L'Hôpital.