Ejemplos

Ejemplo 1: $\int \frac{1}{(x-1)^3}\cdot dx \overset{1}{=} \int (x-1)^{-3}\cdot dx = \frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{-1}{2(x-1)^2} + C$

Ejemplo 2: $\int \frac{x-1}{x^2-2x+5}\cdot dx \overset{2}{=} \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2-2x+5) + C$

Ejemplo 3: $\int \frac{x}{1+x^4}\cdot dx \overset{3}{=} \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot \text{arc tg } x^2 + C$

Ejemplo 4: $\int \frac{x^4-x^3-x^2+2x+3}{x^3-2x^2+x}\cdot dx \overset{*}{=} \int (x+1)\cdot dx + \int \frac{x+3}{x^3-2x^2+x}\cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x+3}{x(x-1)^2}\cdot dx \overset{4}{=}$

$$(*)\quad \begin{array}{r|l} x^4-\ x^3-x^2+2x+3 & x^3-2x^2+x \\ \cline{2-2} -x^4+2x^3-x^2 & x+1 \\ \hline x^3-2x^2+2x+3 & \\ -x^3+2x^2-x & \\ \hline x+3 & \end{array}$$

Ejemplo 5: $\int \frac{x^3-2x+5}{x^2}\cdot dx = \int \left(x - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)\cdot dx = \int x\cdot dx - 2\cdot\int \frac{1}{x}\cdot dx + 5\cdot\int x^{-2}\cdot dx =$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\cdot \ln|x| + 5\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot \ln|x| - \frac{5}{x} + C$$

Ejemplo 6: $\int \frac{x-3}{(x-4)^3}\cdot dx \overset{5}{=} \int \frac{t+1}{t^3}\cdot dt = \int (t^{-2}+t^{-3})\cdot dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + C =$

$$= \frac{-1}{x-4} - \frac{1}{2(x-4)^2} + C$$

Ejemplo 7: $\int \frac{x-7}{x^2-2x+5}\cdot dx = \int \frac{x-7}{(x-1)^2+2^2}\cdot dx \overset{6}{=} \int \frac{2t-6}{4t^2+4}\cdot 2dt = \int \frac{t-3}{t^2+1}\cdot dt = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot dt - 3\int \frac{1}{t^2+1}\cdot dt =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2t}{t^2+1}\cdot dt - 3\cdot\int \frac{1}{t^2+1}\cdot dt = \frac{1}{2}\cdot \ln(t^2+1) - 3\cdot \text{arc tg } t + C = \frac{1}{2}\cdot \ln\frac{x^2-2x+5}{4} - 3\cdot \text{arc tg}\frac{x-1}{2} + C \overset{7}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2-2x+5) - 3\cdot \text{arc tg}\frac{x-1}{2} + D$$

Ejemplo 8: $\int \frac{x+3}{x(x-1)^2}\cdot dx \overset{*}{=} \int \frac{3}{x}\cdot dx - \int \frac{3}{x-1}\cdot dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}\cdot dx = 3\cdot\int \frac{1}{x}\cdot dx - 3\cdot\int \frac{1}{x-1}\cdot dx +$

$$+4\cdot\int (x-1)^{-2}\cdot dx = 3\cdot \ln|x| - 3\cdot \ln|x-1| + 4\cdot\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C = 3\cdot \ln|x| - 3\cdot \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C$$

[1] También se resuelve con el cambio de variable: $x-1=t \Rightarrow dx=dt$.
[2] También se resuelve con el cambio de variable: $x^2-2x+5=t \Rightarrow (2x-2)\cdot dx=dt$.
[3] También se resuelve con el cambio de variable: $x^2=t \Rightarrow 2x\cdot dx=dt$.
[4] Sigue en el ejemplo 8.
[5] Se hace el cambio $x-4=t \Rightarrow dx=dt$.
[6] Se hace el cambio de variable: $x-1=2t \Rightarrow dx=2\cdot dt$.
[7] He aplicado las propiedades de los logaritmos y he sustituido $-(1/2)\cdot \ln 4+C$ por la constante D.

(*) $\dfrac{x+3}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}=\dfrac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}\Rightarrow x+3=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } x=0 & \Rightarrow 3=A\\ \text{Si } x=1 & \Rightarrow 4=C\\ \text{Si } x=2 & \Rightarrow 5=A+2B+2C\Rightarrow 5=3+2B+8\Rightarrow 2B=-6\Rightarrow B=-3\end{cases}$$

Ejemplo 9: $\displaystyle\int\frac{1}{1-\text{sen } x}\cdot dx=\int\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen}^2x}\cdot dx=\int\frac{1+\text{sen } x}{\cos^2x}\cdot dx=\int\frac{1}{\cos^2x}\cdot dx+\int\frac{\text{sen } x}{\cos^2x}\cdot dx\overset{1}{=}\text{tg } x+\sec x+C$

Ejemplo 10: $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\cdot dx\overset{2}{=}\int\sqrt{1-\text{sen}^2t}\cdot\cos t\cdot dt=\int\cos^2t\cdot dt\overset{3}{=}$

Ejemplo 11: $\displaystyle\int\ln x\cdot dx\overset{*}{=}x\cdot\ln x-\int 1\cdot dx=x\cdot\ln x-x+C$

(*)

S	D	I
+	$\ln x$	1
-	$\frac{1}{x}$	x

Ejemplo 12: $\displaystyle\int\cos^2x\cdot dx\overset{*}{=}\text{sen } x\cdot\cos x+\int\text{sen}^2x\cdot dx=\text{sen } x\cdot\cos x+\int(1-\cos^2x)\cdot dx=$

$\displaystyle=\text{sen } x\cdot\cos x+\int 1\cdot dx-\int\cos^2x\cdot dx=\text{sen } x\cdot\cos x+x-\int\cos^2x\cdot dx\overset{4}{\Rightarrow}$

$\displaystyle\Rightarrow 2\cdot\int\cos^2x\cdot dx=\text{sen } x\cdot\cos x+x\Rightarrow\int\cos^2x\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\text{sen } x\cdot\cos x+C$

(*)

S	D	I
+	$\cos x$	$\cos x$
-	$-\text{sen } x$	$\text{sen } x$

Ejemplo 13: $\displaystyle\int x\cdot\ln^2x\cdot dx\overset{*}{=}\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2x-\int x\cdot\ln x\cdot dx\overset{**}{=}\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2x-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot dx\right)+C=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\ln^2x-\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\ln x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\ln^2x-\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\ln x+\frac{1}{4}\cdot x^2+C$

(*)

S	D	I
+	$\ln^2x$	x
-	$\frac{2\cdot\ln x}{x}$	$\frac{x^2}{2}$

(**)

S	D	I
+	$\ln x$	x
-	$\frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{2}$

1 La primera integral es inmediata y la segunda, casi inmediata de tipo potencial; aunque si recuerdas la derivada de la secante, resulta ser también inmediata.
2 Se hace el cambio de variable: $x=\text{sen } t\Rightarrow dx=\cos t\cdot dt$.
3 Sigue en el ejemplo 12.
4 Paso esta última integral al primer miembro pues coincide con la de partida.