1) (1,2p) Encuentra el valor del parámetro k para que la siguiente función sea continua en x=0:

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\ln x & \text{si } x>0 \\ k & \text{si } x=0 \end{cases}$$

2) (1,3p) Comprueba que $f'(x)=\sqrt{4-x^2}$ es la derivada de la función:

$$f(x)=2\cdot\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$$

3) (1,2p) Halla k para que la función $f(x)=x\cdot e^{-kx}$ tenga un extremo en x=1. ¿Es un máximo o un mínimo? Con ese valor de k, estudia luego la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión.

3) (1,2p) Demuestra que la función $f(x)=e^{1/x}+x^2$ tiene un mínimo relativo en el intervalo (1,2). Menciona los resultados teóricos que utilices.

4) (1,3p) Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)^2}$$

5) (1,2p) Discute el siguiente sistema según sean los valores del parámetro a. Resuélvelo en el caso de que sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} ax-y=a+1 \\ ax+ay+a^2z=3a \\ ax-y+(a-a^2)z=1-5a \end{array}\right\}$$

6) (1,3p) Sabiendo que |A|=10, calcula |B|:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2e & -2f & -2d \\ -2b & -2c & -2a \\ -2h & -2i & -2g \end{pmatrix}$$

7) (1,2p) Halla la ecuación de la recta s que pasa por P(1,1,1), es paralela al plano $\pi\equiv x-y+z-3=0$ y corta a la recta $r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

8) (1,3p) Halla la distancia entre las rectas r y s:

$$r\equiv\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad s\equiv\frac{x}{2}=y-1=\frac{z-3}{-1}$$

NOTA: Sólo debe entregarse uno de los dos problemas señalados con el número 3. Si se entregan los dos, se corregirán ambos y la puntuación correspondiente a dicho ejercicio será la peor de las dos notas.

Ejercicio 1: *Encuentra el valor del parámetro k para que la siguiente función sea continua en x=0:*

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot \ln x & si\ x>0 \\ k & si\ x=0 \end{cases}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Para que la función sea continua en x=0 el valor del parámetro k debe ser 0:

- f(0)=k
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \overset{1}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x\cdot \ln x) \overset{2}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{1/x} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x) = 0$

1 Ya que Dom(f)=[0,+∞).
2 Transformamos la indeterminación 0·(-∞) en la indeterminación -∞/+∞.
3 Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital.

Ejercicio 2: *Comprueba que* $f'(x)=\sqrt{4-x^2}$ *es la derivada de la función:*

$$f(x)=2\cdot \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

Derivamos la función f:

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}=\frac{4+4-x^2-x^2}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}=\frac{8-2x^2}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}=\frac{2(4-x^2)}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}=\sqrt{4-x^2}$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada carece de sentido para x=-2 y x=2, el resultado final es aplicable también para ellos. En efecto, como la función f es continua en dichos puntos:[1]

- $f'(-2)\overset{2}{=}f'_{+}(-2)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x>-2}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ x>-2}}\sqrt{4-x^2}=0$
- $f'(2)\overset{2}{=}f'_{-}(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x<2}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x<2}}\sqrt{4-x^2}=0$

Por tanto, $f'(x)=\sqrt{4-x^2}$ y Dom(f')=Dom(f)=[-2,2].

[1] Es fácil demostrarlo.
[2] Ya que Dom(f)=[-2,2].

Ejercicio 3: *Halla k para que la función $f(x)=x\cdot e^{-kx}$ tenga un extremo en x=1. ¿Es un máximo o un mínimo? Con ese valor de k, estudia luego la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión.* (1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Como la función tiene un extremo en x=1 y la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, f'(1)=0:

$$f'(x)=1\cdot e^{-kx}+x\cdot e^{-kx}\cdot(-k)=e^{-kx}-kx\cdot e^{-kx}=(1-kx)\cdot e^{-kx}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)=(1-k)\cdot e^{-k}=0 \overset{1}{\Rightarrow} 1-k=0 \Rightarrow k=1$$

2º) Para averiguar si se trata de un máximo o de un mínimo vamos a aplicar el criterio de la derivada segunda:[2]

$$f'(x) \overset{3}{=} (1-x)\cdot e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=(-1)\cdot e^{-x}+(1-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(-1-1+x)=(x-2)\cdot e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(1)=-1\cdot e^{-1}=-1/e<0$$

Por tanto, se trata de un máximo relativo.

3º) Para estudiar la concavidad y la convexidad utilizamos el criterio de la derivada segunda:

$$f''(x)=(x-2)\cdot e^{-x}$$

Intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
f" es	-	+
f es	cóncava	convexa

Como f' es continua en x=2 (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,[4] la función tiene un punto de inflexión en x=2, cuya ordenada es $y=2/e^2$:

$$f(2)=2\cdot e^{-2}=2/e^2$$

---

1 Ya que el segundo factor (una función exponencial) es positivo.
2 También puede hacerse con el criterio de la variación del signo de la derivada primera.
3 Ya que k=1.
4 Los puntos de inflexión pueden estudiarse también por el criterio de la derivada tercera.

Ejercicio 3: *Demuestra que la función $f(x)=e^{1/x}+x^2$ tiene un mínimo relativo en el intervalo (1,2). Menciona los resultados teóricos que utilices.* (1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

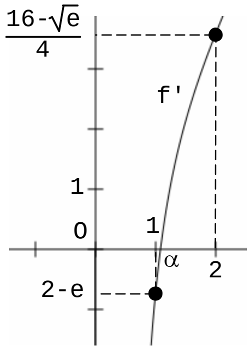
$$f'(x)=e^{1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}+2x=\frac{2x^3-e^{1/x}}{x^2}$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en (1,2) tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(1)\cdot f'(2)<0$:

- $f'(1)=2-e<0$.
- $f'(2)=\frac{16-\sqrt{e}}{4}>0$.



2ª) f' es continua en [1,2]:

- $[1,2]\subset Dom(f')=Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
- Si $a\in[1,2]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{2x^3-e^{1/x}}{x^2}=\frac{2a^3-e^{1/a}}{a^2}=f'(a)$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, f tiene en dicho punto un mínimo relativo.

Ejercicio 4: *Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:*

$$f(x)=\frac{x+1}{(x-1)^2}$$ *(1,3 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Para calcular la integral indefinida de la función f hacemos el cambio de variable: $x-1=t \Rightarrow x=t+1 \Rightarrow dx=dt$.

$$\int\frac{x+1}{(x-1)^2}\cdot dx=\int\frac{t+2}{t^2}\cdot dt=\int\left(\frac{t}{t^2}+\frac{2}{t^2}\right)\cdot dt=\int\frac{1}{t}\cdot dt+2\cdot\int t^{-2}\cdot dt \overset{1}{=}$$

$$=\ln|t|+2\cdot\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C=\ln|t|-\frac{2}{t}+C \overset{2}{=} \ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$$

Comprobación:

$$\left(\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}\right)'=\frac{1}{x-1}-\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{x-1+2}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{(x-1)^2}$$

[1] La primera integral es inmediata de tipo logaritmo y la segunda, inmediata de tipo potencial.

[2] Deshacemos el cambio.

Ejercicio 5: *Discute el siguiente sistema según sean los valores del parámetro a. Resuélvelo en el caso de que sea compatible indeterminado:*

$$\left.\begin{array}{r} ax-y=a+1 \\ ax+ay+a^2z=3a \\ ax-y+(a-a^2)z=1-5a \end{array}\right\}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & a+1 \\ a & a & a^2 & 3a \\ a & -1 & a-a^2 & 1-5a \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+1 & a^2 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & -6a \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ a\cdot(1-a)=0 \Rightarrow a=0,\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right) \overset{3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -x-y=0 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-3 \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow -y=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1 \\ z=\beta \end{cases}$$

3º) Si a=1, el sistema es incompatible:[6]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado.

---

[1] 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

[2] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tendríamos que despejar en el 4º caso (si tuviésemos que hacerlo).

[3] 3ªf+2·2ªf.

[4] Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es dos.

[5] 2ªf+1ªf.

[6] Ya que la tercera ecuación es incompatible.

Ejercicio 6: *Sabiendo que $|A|=10$, calcula $|B|$:*

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2e & -2f & -2d \\ -2b & -2c & -2a \\ -2h & -2i & -2g \end{pmatrix}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$|B|=\begin{vmatrix} -2e & -2f & -2d \\ -2b & -2c & -2a \\ -2h & -2i & -2g \end{vmatrix} \overset{1}{=} (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} e & f & d \\ b & c & a \\ h & i & g \end{vmatrix} \overset{2}{=} 8\cdot\begin{vmatrix} d & f & e \\ a & c & b \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{3}{=}$$

$$= -8\cdot\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{4}{=} 8\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8\cdot|A| = 8\cdot 10 = 80$$

1 Extraemos el factor -2 de las tres filas fuera del determinante.
2 1ªc↔3ªc.
3 2ªc↔3ªc.
4 1ªf↔2ªf.

Ejercicio 7: *Halla la ecuación de la recta s que pasa por P(1,1,1), es paralela al plano $\pi\equiv x-y+z-3=0$ y corta a la recta $r\equiv\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$. (1,2 PUNTOS)*

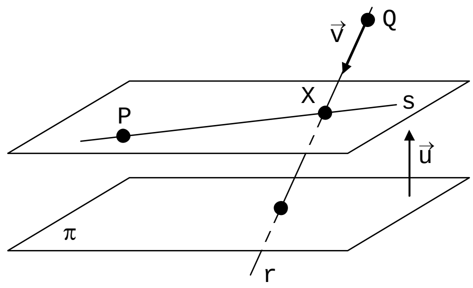
* * *

Solución:

Hallamos las ecuaciones paramétricas (y una determinación lineal) de la recta r:

$$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\\z=\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q(1,3,0)\\\vec{v}(0,0,1)\end{cases}$$

Sea s la recta que andamos buscando y X el punto en el que corta a la recta r:[1]



Como X pertenece a la recta r, satisface su ecuación, $X(1,3,\alpha)$.

Como el punto P no pertenece a la recta r, ya que no satisface su ecuación, $[\overrightarrow{PX}]=(0,2,\alpha-1)$ es un vector direccional de la recta s.

Como la recta s y el plano π son paralelos, el vector direccional de la recta y el vector característico del plano, $\vec{u}=(1,-1,1)$, son perpendiculares. Por tanto:

$$[\overrightarrow{PX}]\perp\vec{u}\Rightarrow[\overrightarrow{PX}]\cdot\vec{u}=0\Rightarrow(0,2,\alpha-1)\cdot(1,-1,1)=0\Rightarrow 0-2+\alpha-1=0\Rightarrow\alpha=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[\overrightarrow{PX}]=(0,2,2)=2\cdot(0,1,1)\Rightarrow PX\equiv\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$$

* * *

También puede calcularse α teniendo en cuenta que el punto X pertenece al plano paralelo a π que pasa por P. Otra forma de hallar s es como intersección de este último plano con el determinado por el punto P y la recta r.[2] O calculando directamente un vector direccional, éste es el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}\wedge[\overrightarrow{QP}]$, ya que ambos son perpendiculares a la recta s.

---

[1] Evidentemente, la recta r y el plano π se cortan en un punto, ya que el vector direccional de r y el vector característico de π no son perpendiculares (su producto escalar es distinto de cero).

[2] Este segundo plano queda determinado, evidentemente, por el punto Q y los vectores $[\overrightarrow{QP}]$ y $\vec{v}$, pero también puede calcularse teniendo en cuenta que es el plano del haz de arista r, $\alpha(x-1)+\beta(y-3)=0$, que pasa por P.

Ejercicio 8: *Halla la distancia entre las rectas r y s:*

$$r \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{2} = y-1 = \frac{z-3}{-1}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

Hallamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(1,0,0) \\ \vec{u}=(2,1,-1) \end{cases}$$

$$\frac{x}{2} = y-1 = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1} \rightarrow \begin{cases} Q(0,1,3) \\ \vec{v}=(2,1,-1) \end{cases}$$

Como se trata de rectas paralelas, ya que tienen el mismo vector direccional, y $[\overrightarrow{QP}]=(1,-1,-3)$:

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|[\overrightarrow{QP}]\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|4\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}|}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{16+25+9}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$