

1) (1,5p) Define función continua en un punto. Encuentra los valores de los parámetros p y q para que la siguiente función sea continua en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+pe^x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ q & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2) (1p) Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x}$$

3) (1p) Dada la siguiente función, demuestra que existe α en $(0,1)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos que utilices:

$$f(x) = 2x^3 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$$

4) (1,5p) Define primitiva de una función. Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$$

5) (1,5p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} x+ay+az=1 \\ x+a^2y+z=a \\ ax+ay+z=1 \end{cases}$$

6) (1,5p) Define matriz inversible. Resuelve la ecuación matricial siguiente y comprueba el resultado:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7) (1p) Si $A(-1,0,3)$ y $B(1,4,7)$, halla las ecuaciones generales de los planos perpendiculares al segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

8) (1p) Halla la ecuación continua de la altura relativa al vértice A del triángulo de vértices los puntos $A(2,-13,3)$, $B(0,-2,1)$ y $C(4,1,1)$.

Ejercicio 1: Define función continua en un punto. Encuentra los valores de los parámetros p y q para que la siguiente función sea continua en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+pe^x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ q & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1, 5 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

El límite de la función f en 0 debe coincidir con $f(0)$:

- $f(0)=q$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1+pe^x}{1+e^{1/x}} = \frac{1+p}{1+e^{1/0^-}} = \frac{1+p}{1+e^{-\infty}} = \frac{1+p}{1+0} = 1+p$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1+pe^x}{1+e^{1/x}} = \frac{1+p}{1+e^{1/0^+}} = \frac{1+p}{1+e^{+\infty}} = \frac{1+p}{1+\infty} = 0$

Por tanto:

$$q=1+p=0 \Rightarrow \begin{cases} q=0 \\ 1+p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=0 \\ p=-1 \end{cases}$$

Ejercicio 2: Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Para estudiar la concavidad y la convexidad utilizamos el criterio de la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x+1) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (1-x-1)}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-1 \cdot e^x + x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot (-1+x)}{e^{2x}} = \frac{x-1}{e^x}$$

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
f'' es	-	+
f es	cóncava	convexa

Como f' es continua en $x=1$ (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,¹ la función tiene un punto de inflexión en $x=1$, cuya ordenada es $y=2/e$.

¹ El estudio de los puntos de inflexión también puede hacerse por el criterio de la derivada tercera.

Ejercicio 3: Dada la siguiente función, demuestra que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos que utilices:

$$f(x)=2x^3+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Primero¹ derivamos la función:

$$f'(x)=6x^2-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)'=6x^2-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

* * *

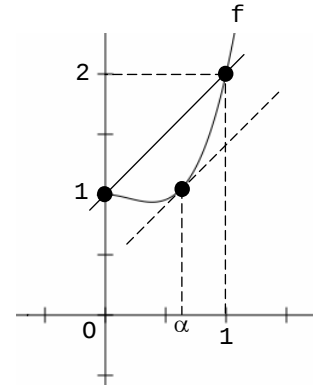
Como la función f satisface las condiciones del **teorema de Lagrange**,² existe α en el intervalo abierto $(0,1)$ tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2-1}{1}=1$$

En efecto:

1ª) f es continua en $[0,1]$ por ser derivable en $\mathbb{R}$.

2ª) f es derivable en $(0,1)$ por serlo en $\mathbb{R}$.



¹ En realidad el primer cálculo que hay que hacer es $[f(1)-f(0)]/(1-0)$. Como sale 1, podemos aplicar el teorema de Lagrange al intervalo $[0,1]$, que es lo que hacemos en el texto.

² También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función $g(x)=f'(x)-1$ cumple las del teorema de Bolzano o que la función $g(x)=f(x)-x$ cumple las del teorema de Rolle.

Ejercicio 4: Define primitiva de una función. Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x}{1+x^2} \cdot dx &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \right) \cdot dx = \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx + \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx \stackrel{1}{=} \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \stackrel{2}{=} \arctan x + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + C = \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\left[\arctan x + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) \right]' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{1+x}{1+x^2}$$

¹ Multiplicamos y dividimos la segunda integral por 2.

² La primera integral es inmediata de tipo arco tangente y la segunda, casi inmediata de tipo logaritmo. Ésta también puede hacerse con el cambio de variable $1+x^2=t$, $2x \cdot dx=dt$.

Ejercicio 5: Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} x+ay+az=1 \\ x+a^2y+z=a \\ ax+ay+z=1 \end{cases}$$

* * *

(1, 5 PUNTOS)

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2-a=0 \\ 2-a-a^2=0 \end{cases} \xrightarrow{4} \begin{cases} a(a-1)=0 \\ -(a-1)(a+2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, & a=1 \\ a=1, & a=-2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-2$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2y \\ z=-1-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1-2\alpha \end{cases}$$

2º) Si $a=0$, el sistema es incompatible:⁶

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x+ay+az=1 \\ a(a-1)y+(1-a)z=a-1 \\ (2-a-a^2)z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow a(a-1)y=a-1 \Rightarrow \boxed{y=1/a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-ay-az=1-1=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

¹ $2af-1af$; $3af-a \cdot 1af$.

² $3af+2af$.

³ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 4º).

⁴ Factorizamos los polinomios.

⁵ $2af \cdot 1/3$; eliminamos la última ecuación por trivial.

⁶ Ya que la tercera ecuación es incompatible.

⁷ $3af-2 \cdot 2af$.

Ejercicio 6: Define matriz inversible. Resuelve la ecuación matricial siguiente y comprueba el resultado:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6+1 & -6+6+0 \\ 3-4+1 & -3+4+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * *

Otra forma de hacerlo es la siguiente:⁶

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{7} A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{8} (A^*)' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} \xrightarrow{9} \frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¹ $1^{af} \leftrightarrow 2^{af}$.

² $2^{af} - 2 \cdot 1^{af}$.

³ $2^{af} + 3^{af}$; $1^{af} - 3^{af}$.

⁴ $1^{af} + 2 \cdot 2^{af}$.

⁵ $2^{af} \cdot (-1)$.

⁶ También puede calcularse la inversa de A por Gauss.

⁷ Calculamos la adjunta de la matriz A.

⁸ Calculamos la traspuesta de la adjunta.

⁹ Ya que $|A|=1$.

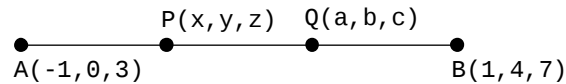
Ejercicio 7: Si $A(-1, 0, 3)$ y $B(1, 4, 7)$, halla las ecuaciones generales de los planos perpendiculares al segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sean P y Q los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales:



Evidentemente:

$$[\vec{AB}] = 3 \cdot [\vec{AP}] \Rightarrow (2, 4, 4) = 3(x+1, y, z-3) \Rightarrow \begin{cases} 2 = 3x+3 \\ 4 = 3y \\ 4 = 3z-9 \end{cases} \Rightarrow P(-1/3, 4/3, 13/3)$$

Como Q es el punto medio del segmento PB :

$$a = \frac{-1/3+1}{2} = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{4/3+4}{2} = \frac{8}{3}; \quad c = \frac{13/3+7}{2} = \frac{17}{3} \Rightarrow Q(1/3, 8/3, 17/3)$$

Como $[\vec{AB}] = (2, 4, 4) = 2 \cdot (1, 2, 2)$, las ecuaciones generales de los planos perpendiculares al segmento AB que pasan por P y Q son las siguientes:

$$\begin{cases} \pi \equiv x+2y+2z+D=0 \\ \pi' \equiv x+2y+2z+D'=0 \end{cases} \xrightarrow{1} \begin{cases} \pi \equiv -1/3+8/3+26/3+D=0 \\ \pi' \equiv 1/3+16/3+34/3+D'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-11 \\ D'=-17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x+2y+2z-11=0 \\ \pi' \equiv x+2y+2z-17=0 \end{cases}$$

¹ Ya que $P \in \pi$ y $Q \in \pi'$.

Ejercicio 8: Halla la ecuación continua de la altura relativa al vértice A del triángulo de vértices los puntos $A(2, -13, 3)$, $B(0, -2, 1)$ y $C(4, 1, 1)$. (1 PUNTO)

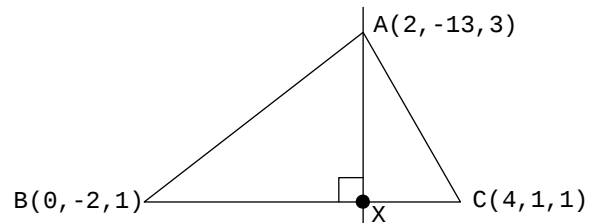
* * *

Solución:

Sea ABC el triángulo dado. Trazamos la altura relativa al vértice A, que corta al lado opuesto en X.

Como la recta BC pasa por el punto $B(0, -2, 1)$ y $[\vec{BC}] = (4, 3, 0)$ es un vector direccional, sus ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$BC \equiv \begin{cases} x=4\alpha \\ y=-2+3\alpha \\ z=1 \end{cases}$$



Como X está en la recta BC, satisface su ecuación: $X(4\alpha, -2+3\alpha, 1)$.

Como los vectores $[\vec{BC}]$ y $[\vec{AX}] = (-2+4\alpha, 11+3\alpha, -2)$ son perpendiculares, su producto escalar es cero:

$$\begin{aligned} [\vec{BC}] \cdot [\vec{AX}] &= 0 \Rightarrow (4, 3, 0) \cdot (-2+4\alpha, 11+3\alpha, -2) = 0 \Rightarrow -8+16\alpha+33+9\alpha = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 25\alpha = -25 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow [\vec{AX}] = (-6, 8, -2) = -2 \cdot (3, -4, 1) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$AX \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+13}{-4} = \frac{z-3}{1}$$

* * *

El parámetro α también se puede calcular teniendo en cuenta que el punto X pertenece al plano perpendicular a BC que pasa por A; o que X es el punto de la recta BC más próximo a A; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABX (en este caso, además de X, te saldrá como solución extraña B).¹ También puede hallarse la altura calculando un vector direccional: el producto vectorial del vector $[\vec{BC}]$ y el característico del plano ABC, ya que ambos son perpendiculares a dicha recta; o hallando el punto $X(x, y, z)$ teniendo en cuenta que el vector $[\vec{BX}]$ es la proyección del vector $[\vec{BA}]$ sobre el vector $[\vec{BC}]$. Por último, se puede obtener la altura como intersección del plano ABC y el perpendicular a la recta BC que pasa por A.

¹ Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo ACX, siempre sale como una de las soluciones el punto A de la recta AB, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por A, se obtiene $AA^2 + AC^2 = AC^2$, esto es, $AC^2 = AC^2$, lo que siempre es cierto.