1) (1,5p) Define función continua en un punto. Estudia la continuidad de la siguiente función en x=1:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{e}}{2-x} & \text{si } x\le 1\\ \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x>1\end{cases}$$

2) (1p) Calcula la recta tangente a la curva $y=x^{\operatorname{sen} x}$ en el punto de abscisa $\pi/2$.

3) (1p) Halla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x^2}{x^2-\operatorname{arc\,tg} x^2}$$

4) (1,5p) Define primitiva de una función. Calcula una primitiva de la función $y=\sqrt{x}\cdot(x-1)$ y comprueba el resultado.

5) (1,2p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+az=1\\ x+y=a+1\\ x+y+az=a^2-a+1\end{array}\right\}$$

6) (1,5p) Define matriz inversible. Calcula los valores del parámetro m para los que la matriz A no tiene inversa. Halla su inversa para el valor del parámetro que quieras y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix}m^2 & m-1\\ m+2 & m-1\end{pmatrix}$$

7) (1p) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix}x & 1 & 0 & 0\\ 0 & x & 1 & 0\\ 0 & 0 & x & 1\\ 1 & 0 & 0 & x\end{vmatrix}=0$$

8) (1,3p) Halla el valor del parámetro k para que la distancia entre las rectas r y s sea de 2 unidades:

$$r\equiv\begin{cases}x-2z=3\\ y-2=0\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x-1}{0}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-k}{-1}$$

Ejercicio 1: *Define función continua en un punto. Estudia la continuidad de la siguiente función en x=1:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{e}}{2-x} & si\ x\leq 1 \\ \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} & si\ x>1 \end{cases}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

La función es continua en x=1:

- $f(1)=\sqrt{e}$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{e}}{2-x} = \sqrt{e}$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} \overset{1}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{2}{x^2-1}\cdot\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\right]} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{x^2-1}\cdot\frac{x+1-2}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

[1] Ya que sale la expresión indeterminada 1^{∞}.

Ejercicio 2: *Calcula la recta tangente a la curva $y=x^{\operatorname{sen} x}$ en el punto de abscisa $\pi/2$.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(\pi/2)=(\pi/2)^{\operatorname{sen}(\pi/2)}=(\pi/2)^1=\pi/2$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:

$$y=x^{\operatorname{sen} x} \overset{1}{=} e^{\operatorname{sen} x\cdot \ln x} \Rightarrow y'= e^{\operatorname{sen} x\cdot \ln x}\cdot(\operatorname{sen} x\cdot \ln x)'=$$

$$=x^{\operatorname{sen} x}\cdot\left(\cos x\cdot \ln x+\operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{x\cdot\cos x\cdot \ln x+\operatorname{sen} x}{x}\cdot x^{\operatorname{sen} x}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(\pi/2)=\frac{0+1}{\pi/2}\cdot(\pi/2)=1$$

Resumiendo:

x	y	y'
$\pi/2$	$\pi/2$	1

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-\pi/2=1\cdot(x-\pi/2) \Rightarrow y-\pi/2=x-\pi/2 \Rightarrow y=x$$

[1] Aunque se puede derivar la función por el método de derivación logarítmica, también podemos hacerlo escribiéndola como función exponencial de base e.

Ejercicio 3: Halla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x^2}{x^2-\operatorname{arc\,tg} x^2}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x^2}{x^2-\operatorname{arc\,tg} x^2}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x}{2x-\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x}\overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x(1+x^4)-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x(1+x^4-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

[1] Como sale la expresión indeterminada 0/0, aplicamos L'Hôpital. Para obtener esta indeterminación hemos aplicado en el numerador y en el denominador la regla del límite de la composición.

[2] Multiplicamos numerador y denominador por $1+x^4$.

Ejercicio 4: *Define primitiva de una función. Calcula una primitiva de la función $y=\sqrt{x}\cdot(x-1)$ y comprueba el resultado.* *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

$$\int\sqrt{x}\cdot(x-1)\cdot dx=\int x^{1/2}\cdot(x-1)\cdot dx=\int(x^{3/2}-x^{1/2})\cdot dx \overset{1}{=}$$

$$=\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1}-\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}+C=\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}-\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}+C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{2}{5}\cdot x^{5/2}-\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right)'=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\cdot x^{3/2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}=x^{3/2}-x^{1/2}=x^{1/2}\cdot(x-1)=\sqrt{x}\cdot(x-1)$$

[1] Se trata de dos integrales inmediatas de tipo potencial.

Ejercicio 5: *Discute y resuelve, en su caso, el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ x+y=a+1 \\ x+y+az=a^2-a+1 \end{array}\right\}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a+1 \\ 1 & 1 & a & a^2-a+1 \end{array}\right) \underset{\sim}{1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-a} & a \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a^2-a} \end{array}\right) \overset{2}{\to} \begin{cases} -a=0 \\ a(a-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:[3]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to x+y=1 \Rightarrow x=1-y \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

2º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+y+z=1 \\ -z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-z \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1 \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es incompatible.

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

2 Si $a^2-a\neq 0$, el sistema es incompatible (caso 3º). Estudiamos primero los demás casos.

3 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es dos.

Ejercicio 6: *Define matriz inversible. Calcula los valores del parámetro m para los que la matriz A no tiene inversa. Halla su inversa para el valor del parámetro que quieras y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix} m^2 & m-1 \\ m+2 & m-1 \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) La matriz A no tiene inversa para m=-1, m=1 y m=2:

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m^2 & m-1 \\ m+2 & m-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow m^2\cdot(m-1)-(m-1)(m+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-1)\cdot(m^2-m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m^2-m-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases} \end{cases}$$

b) Calculamos la inversa de A para m=0:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=2$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} A^*=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} (A^*)'=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ -1+1 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *

También puede calcularse la inversa por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

1 Calculamos la adjunta de A.
2 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.
3 1ªf↔2ªf.
4 1ªf-2ªf.
5 1ªf·1/2; 2ªf·(-1).

Ejercicio 7: *Resuelve la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=0$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=0 \overset{1}{\Rightarrow} x\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0 \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x\cdot x^3-1\cdot 1=0 \Rightarrow x^4-1=0 \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

[1] Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.
[2] El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 8: *Halla el valor del parámetro k para que la distancia entre las rectas r y s sea de 2 unidades:*

$$r\equiv\begin{cases}x-2z=3\\ y-2=0\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x-1}{0}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-k}{-1}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

Hallamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x-2z=3\\ y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3+2z\\ y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3+2\alpha\\ y=2\\ z=\alpha\end{cases}\to\begin{cases}P(3,2,0)\\ \vec{u}=(2,0,1)\end{cases}$$

$$s\equiv\frac{x-1}{0}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-k}{-1}\to\begin{cases}Q(1,-3,k)\\ \vec{v}=(0,1,-1)\end{cases}$$

Las rectas no son paralelas:

$$\frac{2}{0}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{1}{-1}$$

Por tanto, como $[\overrightarrow{QP}]=(2,5,-k)$:

$$d(r,s)=\frac{\left|[[\overrightarrow{QP}],\vec{u},\vec{v}]\right|}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}2&5&-k\\2&0&1\\0&1&-1\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&1\\0&1&-1\end{matrix}\right\|}=\frac{|-2k-2+10|}{|-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}|}=\frac{|8-2k|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|8-2k|}{3}$$

Como la distancia es 2:

$$\frac{|8-2k|}{3}=2\Rightarrow|8-2k|=6\Rightarrow 8-2k=\pm6\Rightarrow 4-k=\pm3\Rightarrow k=4\pm3\Rightarrow\begin{cases}k=7\\ k=1\end{cases}$$