

1) De la siguiente función f , se pide:

- a) Dominio.
- b) Derivada.
- c) Continuidad y discontinuidades.

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x^2}$$

2) De la función del problema anterior, se pide.

- a) Asíntotas verticales.
- b) Su comportamiento en $+\infty$.

3) Halla el punto de la curva $y=x^3-3x^2+6x-4$ en el que la recta tangente tiene pendiente mínima. Calcula la ecuación de dicha recta tangente.

4) Encuentra el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y=x^2-3x-10$ e $y=2x-4$.

5) Discute según sea el valor del parámetro k y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z=k \end{array} \right\}$$

6) Dadas las matrices A y B , halla:

a) $Y=3 \cdot A \cdot A' - 2 \cdot I$, donde A' e I son, respectivamente, la traspuesta de A y la matriz unidad de orden 2.

b) La matriz X tal que $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2$$

8) Si $A(1,1,1)$, $B(-1,3,1)$, $C(1,0,0)$ y $D(0,2,0)$, halla el punto P de la recta AB tal que el triángulo CPD sea rectángulo con hipotenusa PC .

¹ Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: De la siguiente función, se pide: **a)** dominio; **b)** derivada; **c)** continuidad y discontinuidades.

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x^2}$$

* * *

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$:

$$\begin{cases} (x+2)/x^2 > 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x^2} \stackrel{1}{=} \ln(x+2) - 2 \cdot \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+2} - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-2x-4}{x(x+2)} = -\frac{x+4}{x(x+2)}$$

c) La función es continua en su dominio, ya que es derivable en él. Además, en $x=0$ presenta una discontinuidad de salto infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{x+2}{x^2} \stackrel{2}{=} \ln \frac{2}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty$$

¹ Aplicamos las propiedades de los logaritmos (ya se ha justificado este modo de proceder en *Derivadas*, en este mismo *blog*). También puede hallarse la derivada directamente.

² Aplicamos la regla del límite de la composición.

Ejercicio 2: De la función del problema anterior, se pide: **a)** asíntotas verticales; **b)** su comportamiento en $+\infty$.

* * *

Solución:

a) Las rectas $x=-2$ y $x=0$ son asíntotas verticales de la función (esta última por el cálculo hecho en el apartado c del problema anterior):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \ln \frac{x+2}{x^2} \stackrel{1}{=} \ln \frac{0^+}{4} = \ln 0^+ = -\infty$$

b) La función tiene en $+\infty$ una rama parabólica en la dirección del eje OX:

$$\begin{aligned} \bullet \quad k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1 + \frac{2}{x}}{x} \stackrel{1}{=} \\ &= \ln \frac{1+0}{+\infty} = \ln 0^+ = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+2}{x^2}}{x} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x+2} \cdot \left(\frac{x+2}{x^2}\right)'}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} \cdot \frac{x^2 - (x+2) \cdot 2x}{x^4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2 - 2x^2 - 4x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 4x}{x^3 + 2x^2} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

¹ Aplicamos la regla del límite de la composición.

² Como sale la indeterminación ∞/∞ , aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado la regla del límite de la composición al numerador.

³ Ya que $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \sim a_nx^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x , simplificando a continuación. O por L'Hôpital.

Ejercicio 3: Halla el punto de la curva $y=x^3-3x^2+6x-4$ en el que la recta tangente tiene pendiente mínima. Calcula la ecuación de dicha recta tangente.

* * *

Solución:

a) Como la pendiente de la recta tangente coincide con la derivada, ésta debe ser mínima:

$$m=y'=3x^2-6x+6$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$m'=6x-6=0 \Rightarrow 6x=6 \quad x=1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,¹ derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $x=1$:

$$m''=6 \Rightarrow m''(1)=6>0 \Rightarrow m \text{ es mínima en } x=1$$

Por último:

$$x=1 \Rightarrow y=1-3+6-4=0 \Rightarrow P(1,0)$$

b) Como, evidentemente, la pendiente de la recta tangente en el punto $P(1,0)$ es $m=3-6+6=3$, su ecuación explícita es:

$$y-0=3(x-1) \Rightarrow y=3x-3$$

¹ También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 4: Encuentra el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y=x^2-3x-10$ e $y=2x-4$.

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2-3x-10 \\ y=2x-4 \end{cases} \Rightarrow x^2-3x-10=2x-4 \Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} x=-1 \\ x=6 \end{cases}$$

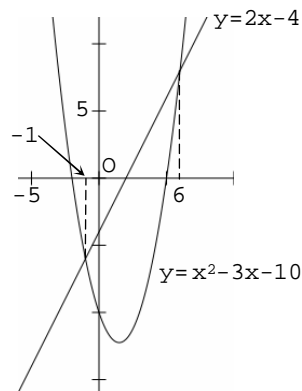
2º) Averiguamos entre -1 y 6 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	Y_1	Y_2
0	-10	-4

3º) Calculamos el área:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^6 (2x-4-x^2+3x+10) \cdot dx = \int_{-1}^6 (6+5x-x^2) \cdot dx \stackrel{1}{=} \left[6x+5 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^6 = \\ &= (36+90-72) - \left(-6 + \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \right) = 54+6 - \frac{5}{2} - \frac{1}{3} = 60 - \frac{17}{6} = \frac{360-17}{6} = \frac{343}{6} \end{aligned}$$

Representación gráfica:



¹ Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 5: Discute según sea el valor del parámetro k y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z=k \end{cases}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{array} \right) &\stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) &\stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 \end{array} \right) &\stackrel{3}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 1-k & 2-k-k^2 \end{array} \right) &\stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & 3-2k-k^2 \end{array} \right) &\stackrel{5}{\rightarrow} \\ &\rightarrow \begin{cases} k-1=0 \\ k-1=0 \\ k^2+2k-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-3 \\ k=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $k=-3$, el sistema es compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=-3 \\ -4y=4 \\ -4z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3-y-z \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

2º) Si $k=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es incompatible.

¹ $1^{\text{af}} \leftrightarrow 4^{\text{af}}$.

² $2^{\text{af}}-1^{\text{af}}$; $3^{\text{af}}-1^{\text{af}}$; $4^{\text{af}}-k \cdot 1^{\text{af}}$.

³ $4^{\text{af}}+2^{\text{af}}$.

⁴ $4^{\text{af}}+3^{\text{af}}$. Los pasos 3 y 4 se pueden hacer a la vez.

⁵ Si $3-2k-k^2 \neq 0$, el sistema es incompatible (caso 3º). Estudiamos primero los demás casos.

Ejercicio 6: Dadas las matrices A y B , halla: **a)** $Y=3 \cdot A \cdot A' - 2 \cdot I$, donde A' e I son, respectivamente, la traspuesta de A y la matriz unidad de orden 2; **b)** la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *

Solución:

a) Calculamos la matriz Y :

$$\begin{aligned} Y &= 3 \cdot A \cdot A' - 2 \cdot I = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Aplicamos el método de Gauss para resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) &\stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 15 & 6 & 0 & 3 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 3 \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & -10 & 3 \end{array} \right) \stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 3 \end{array} \right) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-10 & -3+3 \\ 20-20 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

* * *

También puede resolverse dicha ecuación hallando primero la inversa de A por el método de Gauss o por determinantes y despejando X :

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

¹ $2^{af} \cdot 3$.

² $2^{af} - 5 \cdot 1^{af}$.

³ $1^{af} - 2^{af}$.

⁴ $1^{af} \cdot 1/3$.

Ejercicio 7: Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 4+x & 1+x & 1 & 1 \\ 4+x & 1 & 1+x & 1 \\ 4+x & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \\ = \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \stackrel{3}{=} (4+x)x^3$$

Por tanto:

$$(4+x)x^3 = x^2 \Rightarrow (4+x)x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(4x+x^2-1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 + 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (solución doble)} \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

¹ $1^a c + 2^a c + 3^a c + 4^a c$.

² $2^a f - 1^a f$; $3^a f - 1^a f$; $4^a f - 1^a f$.

³ El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 8: Si $A(1,1,1)$, $B(-1,3,1)$, $C(1,0,0)$ y $D(0,2,0)$, halla el punto P de la recta AB tal que el triángulo CPD sea rectángulo con hipotenusa PC .

* * *

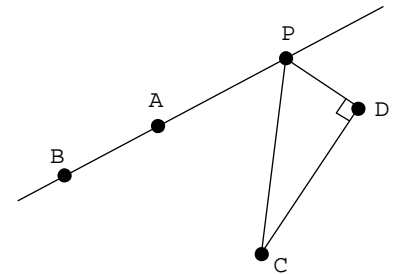
Solución:

Como la recta AB pasa por el punto $A(1,1,1)$ y tiene por vector direccional $[\vec{AB}] = (-2, 2, 0)$, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=1+2\alpha \\ z=1 \end{cases}$$

Como el punto P pertenece a la recta AB , satisface su ecuación:

$$P(1-2\alpha, 1+2\alpha, 1)$$



Si el triángulo CPD es rectángulo con hipotenusa PC , los vectores $[\vec{DP}]$ y $[\vec{DC}]$ son perpendiculares:¹

$$\begin{aligned} [\vec{DP}] \perp [\vec{DC}] &\Rightarrow [\vec{DP}] \cdot [\vec{DC}] = 0 \Rightarrow (1-2\alpha, -1+2\alpha, 1) \cdot (1, -2, 0) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1-2\alpha+2-4\alpha=0 \Rightarrow 6\alpha=3 \Rightarrow \alpha=1/2 \Rightarrow P(0, 2, 1) \end{aligned}$$

¹ También puede calcularse el parámetro α aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PCD .