

1) (1p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-2x})$$

2) (1p) Halla a y b para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ 5x-3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x+a+2b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3) (1p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x) = \sqrt{x^3 e^x}$$

4) (1,5p) Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $y=2-x$ e $y=x^2$, para $x > 0$.

5) (1p) Calcula los valores del parámetro a para que el sistema siguiente sea de Cramer:

$$\begin{cases} x+ay+z=1 \\ 2x-y+az=2 \\ x+y+az=3 \end{cases}$$

6) (2p) Dadas las matrices A y B:

a) Halla x para que A tenga inversa.

b) Si $x=2$, halla Y, matriz cuadrada de orden 3, que es la solución de la ecuación $A \cdot Y + B = Y$.

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7) (1,5p) Estudia, según los valores de m, la posición relativa de los planos: $mx-y-z=m$, $x-my+mz=-m$, $x+y+z=1$.

8) (1p) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A(1,1,1) y es paralela a los planos:

$$\pi \equiv 3x+2y-z-1=0 \quad \pi' \equiv \begin{cases} x=2+\lambda-\mu \\ y=1-\lambda+\mu \\ z=2+\lambda+2\mu \end{cases}$$

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-2x})$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-2x}) &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x-x^2+2x}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-2x}} \stackrel{2}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

¹ Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

² Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.

Ejercicio 2: Halla a y b para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ 5x-3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x+a+2b & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

Para que la función sea continua en su dominio, debe serlo en $x=1$ y $x=2$.

Si lo es en $x=1$, entonces $a+b+1=2$:

- $f(1) = 5 - 3 = 2$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (ax^2 + bx + 1) = a + b + 1$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (5x - 3) = 5 - 3 = 2$

Si lo es en $x=2$, entonces $2+a+2b=7$:

- $f(2) = 2 + a + 2b$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (5x - 3) = 10 - 3 = 7$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x + a + 2b) = 2 + a + 2b$

Por tanto:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+2b=5 \end{cases} \stackrel{1}{\Rightarrow} \begin{cases} a+b=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}$$

¹ A la segunda ecuación le restamos la primera.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica la función:

$$f(x) = \sqrt{x^3 e^x}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &\stackrel{1}{=} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3 e^x}} \cdot (x^3 e^x)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3 e^x}} \cdot (3x^2 e^x + x^3 e^x) = \frac{x^2 e^x \cdot (3+x)}{2 \cdot \sqrt{x^3 e^x}} = \\ &= \frac{x^2 e^x \cdot (3+x) \cdot \sqrt{x^3 e^x}}{2x^3 e^x} = \frac{(3+x) \cdot \sqrt{x^3 e^x}}{2x} \stackrel{2}{=} \frac{3+x}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^3 e^x}{x^2}} = \frac{(3+x) \cdot \sqrt{x e^x}}{2} \end{aligned}$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada carece de sentido para $x=0$, el resultado final es aplicable también para dicho punto. En efecto, como la función f es continua en $x=0$:³

$$f'(0) \stackrel{4}{=} f'_+(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(3+x) \cdot \sqrt{x e^x}}{2} = 0$$

Por tanto, $f'(x) = \frac{(3+x) \cdot \sqrt{x e^x}}{2}$ y $\text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) = [0, +\infty)$.

¹ También puede hacerse por el método de derivación logarítmica.

² Como $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$, $x > 0$.

³ Es fácil demostrarlo.

⁴ Ya que $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$.

Ejercicio 4: Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $y=2-x$ e $y=x^2$, para $x>0$.

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

1°) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=2-x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow 2-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \stackrel{1}{\Rightarrow} x=1$$

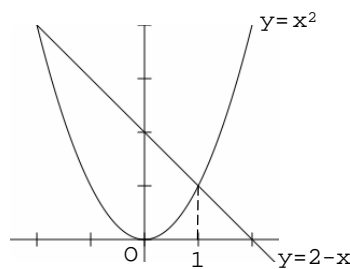
2°) Averiguamos entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	Y ₁	Y ₂
1/2	3/2	1/4

3°) Calculamos el área:

$$A=\int_0^1 (2-x-x^2) \cdot dx \stackrel{2}{=} \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{12-3-2}{6} = \frac{7}{6}$$

Representación gráfica:



¹ Ya que $x>0$.

² Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 5: Calcula los valores del parámetro a para que el sistema siguiente sea de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2x-y+az=2 \\ x+y+az=3 \end{array} \right\} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

El sistema es de Cramer para todos los valores del parámetro, excepto -3 y 1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a+2+a^2+1-a-2a^2 = -a^2-2a+3=0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2+4}{-2} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=1 \end{cases}$$

Ejercicio 6: Dadas las matrices A y B: **a)** halla x para que A tenga inversa; **b)** si $x=2$, halla Y, matriz cuadrada de orden 3, que es la solución de la ecuación $A \cdot Y + B = Y$.

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

a) A es inversible para todos los valores de x, excepto 0 y 2:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

b) Evidentemente:

$$A \cdot Y + B = Y \Rightarrow B = Y - A \cdot Y \Rightarrow (I - A) \cdot Y = B$$

Ahora bien, si $x=2$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos por Gauss la ecuación matricial $(I - A) \cdot Y = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow Y = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A \cdot Y + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = Y$$

* * *

También puede hacerse calculando la inversa de $I - A$ por el método de Gauss o por determinantes y despejando Y:

$$(I - A) \cdot Y = B \Rightarrow Y = (I - A)^{-1} \cdot B$$

¹ $1^{\text{af}} - 2 \cdot 3^{\text{af}}$.

² $3^{\text{af}} \cdot (-1)$.

Ejercicio 7: Estudia, según los valores de m , la posición relativa de los planos: $mx-y-z=m$, $x-my+mz=-m$, $x+y+z=1$.

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & -1 & m \\ 1 & -m & m & -m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) &\stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & m & -m \\ m & -1 & -1 & m \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -m-1 & m-1 & -m-1 \\ 0 & -1-m & -1-m & 0 \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -m-1 & m-1 & -m-1 \\ 0 & 0 & -2m & m+1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} -m-1=0 \\ -2m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $m=-1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro. Por tanto, los planos se cortan en una recta (forman parte del haz de planos de arista la recta r):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$$

2º) Si $m=0$, el sistema es incompatible. Ahora bien, como el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, dos de los planos se cortan en una recta y el tercero es paralela a ella:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado. Por tanto, los planos se cortan en un punto.

¹ $1^{\text{af}} \leftrightarrow 3^{\text{af}}$.

² $2^{\text{af}} - 1^{\text{af}}$; $3^{\text{af}} - m \cdot 1^{\text{af}}$.

³ $3^{\text{af}} - 2^{\text{af}}$.

⁴ $3^{\text{af}} + 2^{\text{af}}$.

Ejercicio 8: Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es paralela a los planos:

$$\pi \equiv 3x + 2y - z - 1 = 0 \qquad \pi' \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda - \mu \\ y = 1 - \lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda + 2\mu \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

Como $\vec{a} = (1, -1, 1)$ y $\vec{b} = (-1, 1, 2)$ son vectores paralelos al plano π' , un vector característico de dicho plano es:

$$\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$$

Por otro lado, $\vec{v} = (3, 2, -1)$ es un vector característico del plano π .

Como la recta que andamos buscando es paralela a ambos planos, los vectores característicos de éstos son perpendiculares a dicha recta. Por tanto, un vector direccional de ésta es el producto vectorial de dichos vectores:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} = 3(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

Y como la recta pasa por el punto $A(1,1,1)$, su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

* * *

También puede obtenerse la recta como intersección de los planos paralelos a los dados que pasan por P. O calculando la intersección de los planos dados, ya que así obtenemos una recta paralela a la que buscamos y, por tanto, un vector direccional de ésta.