1) (1p) Define función derivada.

2) (1p) Demuestra que la derivada de $y=\ln x$ es $y'=1/x$.

3) (1p) Enuncia el criterio de la derivada segunda para el estudio de la curvatura y los puntos de inflexión.

4) (1p) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $2y^2=x^3+y^x$ en el punto de abscisa 1.

5) (1p) Halla dos puntos A y B de la curva $y=x^3$ tales que la diferencia de sus abscisas sea 2 y que la recta que pasa por ellos tenga pendiente mínima.

6) (1p) Dada la función $f(x)=2x^2\cdot\cos(2\pi/x)$, demuestra que existe α en (1,3) tal que $f'(\alpha)=-1$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

7) (1p) Halla:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

8) (1p) Calcula a, b y c sabiendo que la función $y=ax^3+x^2+bx+c$ tiene un mínimo en (0,0) y que la pendiente de la tangente de inflexión es 1/3.

9) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}$$

Ejercicio 4: *Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $2y^2=x^3+y^x$ en el punto de abscisa 1.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$2y^2=x^3+y^x \overset{1}{\Rightarrow} 2y^2=1+y \Rightarrow 2y^2-y-1=0 \Rightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-1/2 \end{cases} \overset{2}{\Rightarrow} y=1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:[3]

$$2y^2=x^3+y^x \overset{4}{\Rightarrow} 2y^2=x^3+e^{x\cdot\ln y} \Rightarrow 4yy'=3x^2+e^{x\cdot\ln y}\cdot(x\cdot\ln y)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4yy'=3x^2+y^x\cdot\left(\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}\right)$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$4yy'=3x^2+y^x\cdot\left(\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}\right) \overset{5}{\Rightarrow} 4y'=3+y' \Rightarrow 3y'=3 \Rightarrow y'=1$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	1

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-1=1\cdot(x-1) \Rightarrow y-1=x-1 \Rightarrow y=x$$

---

1 Ya que x=1.
2 Como y^x es una función potencial-exponencial, la base debe ser positiva.
3 Por el método de derivación implícita.
4 Aunque el sumando y^x se puede derivar aparte por el método de derivación logarítmica, es más cómodo escribirlo como función exponencial de base e.
5 Ya que x=1 e y=1.

Ejercicio 5: *Halla dos puntos A y B de la curva $y=x^3$ tales que la diferencia de sus abscisas sea 2 y que la recta que pasa por ellos tenga pendiente mínima.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Como los puntos A y B pertenecen a la curva y la diferencia de sus abscisas es 2, si $A(a,a^3)$, entonces $B(a+2,(a+2)^3)$.

La pendiente de la recta AB tiene que ser mínima:

$$[\overrightarrow{AB}]=(a+2-a,(a+2)^3-a^3)=(2,a^3+6a^2+12a+8-a^3)=(2,6a^2+12a+8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{6a^2+12a+8}{2}=3a^2+6a+4$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$m'=6a+6=0 \Rightarrow a=-1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $a=-1$:

$$m''=6 \Rightarrow m''(-1)=6>0 \Rightarrow m \text{ es mínima en } a=-1$$

Por tanto, $A(-1,-1)$ y $B(1,1)$.

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 6: *Dada la función $f(x)=2x^2\cdot\cos(2\pi/x)$, demuestra que existe α en (1,3) tal que $f'(\alpha)=-1$. Menciona los resultados teóricos que utilices.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Primero[1] derivamos la función:

$$f'(x)=4x\cdot\cos\frac{2\pi}{x}+2x^2\cdot\left(-\mathrm{sen}\frac{2\pi}{x}\right)\cdot\left(\frac{2\pi}{x}\right)'=$$

$$=4x\cdot\cos\frac{2\pi}{x}-2x^2\cdot\mathrm{sen}\frac{2\pi}{x}\cdot\left(\frac{-2\pi}{x^2}\right)=4x\cdot\cos\frac{2\pi}{x}+4\pi\cdot\mathrm{sen}\frac{2\pi}{x}$$

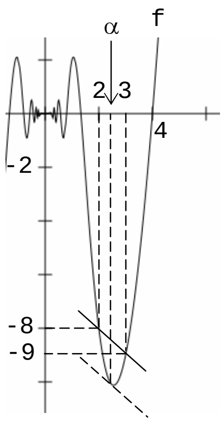
Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange,[2] existe α en el intervalo abierto[3] (2,3) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{18\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-8\cdot\cos\pi}{1}=18\cdot\frac{-1}{2}-8\cdot(-1)=-9+8=-1$$

En efecto:

1ª) f es continua en el cerrado [2,3] por ser derivable en $\mathbb{R}^*$.[4]

2ª) f es derivable en el abierto (2,3) por serlo en $\mathbb{R}^*$.



[1] En realidad el primer cálculo que hay que hacer es [f(3)-f(1)]/(3-1). Como no sale -1, hemos calculado [f(3)-f(2)]/(3-2). Al salirnos ahora -1, podemos aplicar el teorema de Lagrange al intervalo [2,3], que es lo que hacemos en el texto.

[2] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función g(x)=f'(x)+1 cumple las del teorema de Bolzano o que la función g(x)=f(x)+x cumple las del teorema de Rolle.

[3] Si α está en el intervalo (2,3), también está en (1,3).

[4] R*=R-{0}.

Ejercicio 7: *Halla el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x} \overset{1}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \overset{2}{=}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \ln x}{x \cdot \ln x + x - 1} \overset{1}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

1 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
2 Multiplicamos numerador y denominador por x.

Ejercicio 8: *Calcula a, b y c sabiendo que la función $y=ax^3+x^2+bx+c$ tiene un mínimo en (0,0) y que la pendiente de la tangente de inflexión es 1/3.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Teniendo en cuenta la condición necesaria de extremo relativo, el dato de la pendiente de la tangente de inflexión y la condición necesaria de punto de inflexión, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y"
0	0	0	
x		1/3	0

Como $y=ax^3+x^2+bx+c$, entonces $y'=3ax^2+2x+b$ e $y''=6ax+2$.

Como el punto (0,0) pertenecen a las gráficas de las funciones y e y', y los puntos (x,0) y (x,1/3) a las de las funciones y" e y', respectivamente, tenemos lo siguiente:

$$y(0)=0 \Rightarrow c=0$$

$$y'(0)=0 \Rightarrow b=0$$

$$y''(x)=0 \Rightarrow 6ax+2=0 \Rightarrow 3ax+1=0$$

$$y'(x)=1/3 \overset{1}{\Rightarrow} 3ax^2+2x=1/3 \Rightarrow 9ax^2+6x=1$$

Por último, resolvemos el sistema formado por las dos últimas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3ax+1=0 \\ 9ax^2+6x=1 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{1}{3x} \Rightarrow 9\cdot\frac{-1}{3x}\cdot x^2+6x=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x+6x=1 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=1/3 \Rightarrow a=-1$$

1 Ya que b=0.

Ejercicio 9: *Estudia y representa la gráfica de la función:*

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio es simétrico respecto del origen de coordenadas, calculamos f(-x):

$$f(-x)=\frac{(-x+1)^2}{-x}$$

La función no es ni par ni impar.

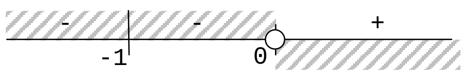
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$.

b) Con OY: como $x\neq 0$, no hay cortes.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta x=0 es asíntota vertical:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty;\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

b) La recta y=x+2 es asíntota oblicua en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2(x+1)}{1}=\pm\infty$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2(x+1)}{2x}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2}=\lim_{x\to\pm\infty}1=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x}\overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1}=\lim_{x\to\pm\infty}2=2$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{(x+1)^2}{x}-x-2=\frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{x}=\frac{1}{x}$$

[1] Hemos señalado el origen para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

[2] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación. O teniendo en cuenta que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n\sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

Por tanto, como 1/x es negativo en -∞ y positivo en +∞, la función está por debajo de la asíntota en -∞ y por encima en +∞.

7º) Continuidad. Discontinuidades:

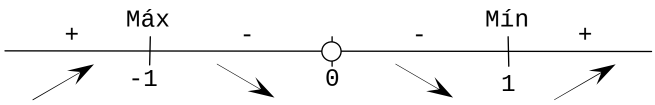
a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2(x+1)\cdot x-(x+1)^2\cdot 1}{x^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-2x-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x^2}$$

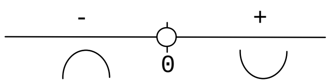
b) La función presenta en x=0 una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

8º) Signo de la derivada primera:[1]



9º) Signo de la derivada segunda:[2]

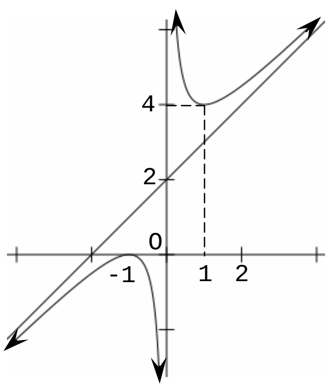
$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-2x(x^2-1)}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
-1	0	Corte con OX y máximo
1	4	Mínimo

Gráfica:



---

[1] Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

[2] Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.