1) (1p) Prueba que si f y g son dos funciones derivables en x_0, se verifica: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

2) (1p) Demuestra que la derivada de $y=a^u$ $(0<a\neq 1)$ es $y'=a^u\cdot u'\cdot \ln a$.

3) (1p) Enuncia el criterio de la derivada primera:

a) Para el estudio de la monotonía y los extremos.

b) Para el estudio de la curvatura y de los puntos de inflexión.

4) (1p) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3$ trazada desde el punto P(0,-2).

5) (1p) De todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio 2 cm, halla las dimensiones del que tiene área máxima.

6) (1p) Dada la función $f(x)=x^{\ln x}$, demuestra que existe $\alpha\in(1,e)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

7) (1p) Halla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\ln\cos x}$$

8) (1p) Calcula a y b para que la función $y=(a+bx)\cdot e^{-x}$ tenga un punto de inflexión en (0,2).

9) (2p) Estudia y representa la gráfica de la siguiente función:

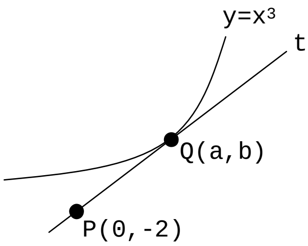
$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

Ejercicio 4: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3$ trazada desde el punto P(0,-2). (1 PUNTO)

* * *

Solución:

El punto P no pertenece a la curva pues no satisface su ecuación. Sea Q(a,b) el punto de tangencia:



Como el punto Q está en la curva, satisface su ecuación: $b=a^3$.

Como el punto Q está en la recta tangente, satisface su ecuación. Ahora bien, de esta recta sólo conocemos el punto P. Por tanto, su ecuación punto-pendiente es $y+2=m(x-0)$. En consecuencia: $b+2=ma$.

Por otro lado, la pendiente de la curva en el punto Q es m:

$$y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2 \overset{1}{\Rightarrow} m=3a^2$$

Por último, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} b=a^3 \\ b+2=ma \\ m=3a^2 \end{cases} \Rightarrow a^3+2=3a^3 \Rightarrow 2a^3=2 \Rightarrow a^3=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow m=3$$

Por tanto, la ecuación explícita de la tangente es:

$$y+2=3x \Rightarrow y=3x-2$$

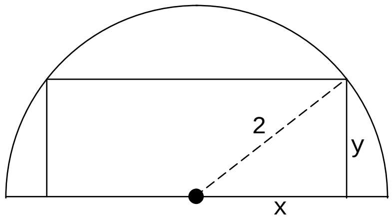
[1] En el punto Q, x=a e y'=m.

Ejercicio 5: *De todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio 2 cm, halla las dimensiones del que tiene área máxima.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Sean x e y, respectivamente, la mitad de la base y la altura del rectángulo inscrito en la semicircunferencia de radio 2 cm:



El área del rectángulo tiene que ser máxima:

$$A=2xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow y^2=4-x^2 \overset{1}{\Rightarrow} y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow A=2x\cdot\sqrt{4-x^2}$$

Como A>0, podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C=4x^2\cdot(4-x^2)=16x^2-4x^4$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=32x-16x^3=16x\cdot(2-x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \overset{2}{\Rightarrow} x=\sqrt{2}$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[3] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $x=\sqrt{2}$:

$$C''=32-48x^2 \Rightarrow C''(\sqrt{2})=32-48\cdot 2<0 \Rightarrow A \text{ es máxima en } x=\sqrt{2}$$

Por tanto, la base es $2x=2\cdot\sqrt{2}$ cm; y la altura, $y=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$ cm.

---

1 Ya que y es positivo.
2 Ya que x es positivo.
3 También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 6: *Dada la función $f(x)=x^{\ln x}$, demuestra que existe $\alpha\in(1,e)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos que utilices.*

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Primero[1] derivamos la función:

$$f(x)=x^{\ln x} \overset{2}{=} e^{\ln x\cdot\ln x}=e^{\ln^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^{\ln^2 x}\cdot(\ln^2 x)'=x^{\ln x}\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\cdot\ln x\cdot x^{\ln x}}{x}$$

* * *

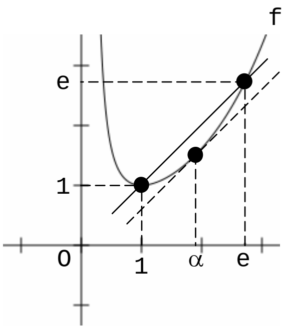
Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange,[3] existe α en el intervalo abierto (1,e) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{e^{\ln e}-1^{\ln 1}}{e-1}=\frac{e-1}{e-1}=1$$

En efecto:

1ª) f es continua en [1,e] por ser derivable en $(0,+\infty)$.[4]

2ª) f es derivable en (1,e) por serlo en $(0,+\infty)$.



---

[1] En realidad el primer cálculo que hay que hacer es [f(e)-f(1)]/(e-1). Como sale 1, podemos aplicar el teorema de Lagrange al intervalo [1,e], que es lo que hacemos en el texto.

[2] Aunque se puede derivar la función por el método de derivación logarítmica, también podemos hacerlo escribiéndola primero como función exponencial de base e.

[3] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función $g(x)=f'(x)-1$ cumple las del teorema de Bolzano o que la función $g(x)=f(x)-x$ cumple las del teorema de Rolle.

[4] $\text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)=(0,+\infty)$.

Ejercicio 7: Halla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\ln\cos x}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\ln\cos x}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen}x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-\operatorname{tg}x}\overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{-(1+\operatorname{tg}^2x)}=\frac{0}{-1}=0$$

[1] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado al denominador la regla del límite de la composición.

[2] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse teniendo en cuenta que, en $x=0$, $1-\cos x\sim x^2/2$ y $\operatorname{tag}x\sim x$.

Ejercicio 8: *Calcula a y b para que la función $y=(a+bx)\cdot e^{-x}$ tenga un punto de inflexión en (0,2).*

(1 PUNTO)

** * **

Solución:

Teniendo en cuenta la condición necesaria de punto de inflexión, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y"
0	2		0

Como $y=(a+bx)\cdot e^{-x}$, entonces:

- $y'=b\cdot e^{-x}+(a+bx)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(-a+b-bx)\cdot e^{-x}$
- $y''=-b\cdot e^{-x}+(-a+b-bx)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(a-2b+bx)\cdot e^{-x}$

Como los punto (0,2) y (0,0) pertenecen a las gráficas de las funciones y e y", respectivamente, tenemos lo siguiente:

$$y(0)=2 \Rightarrow a=2$$

$$y''(0)=0 \Rightarrow a-2b=0 \overset{1}{\Rightarrow} 2b=2 \Rightarrow b=1$$

[1] Ya que a=2.

Ejercicio 9: *Estudia y representa la gráfica de la siguiente función:*

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1} \qquad \text{(2 PUNTOS)}$$

* * *

1º) Dominio: $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio no es simétrico respecto del origen de coordenadas, la función no es ni par ni impar.

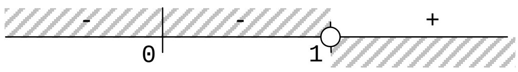
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=0$.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta $x=1$ es asíntota vertical:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty;\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

b) La recta $y=x+1$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-1}\stackrel{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1}=\pm\infty$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}\stackrel{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}\stackrel{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1}==1$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{x^2}{x-1}-x-1=\frac{x^2-x^2+x-x+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$$

Por tanto, como $1/(x-1)$ es negativo en $-\infty$ y positivo en $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota en $-\infty$ y por encima en $+\infty$.

7º) Continuidad. Discontinuidades:

a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

---

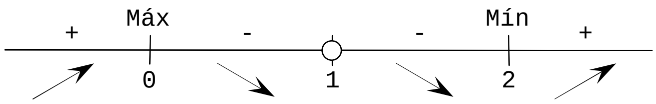
[1] Hemos señalado el punto $x=1$ para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

[2] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación. O teniendo en cuenta que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n\sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$$

b) La función presenta en x=1 una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

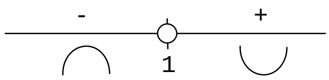
8º) Signo de la derivada primera:[1]



9º) Signo de la derivada segunda:[2]

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=$$

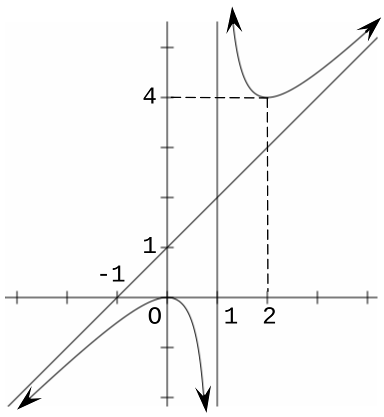
$$=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
0	0	Corte con los dos ejes y máximo
2	4	Mínimo

Gráfica:



[1] Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.
[2] Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.