1) (1p) Demuestra la fórmula de la derivada de $y=\text{arc sen} f$.

2) (1p) Enuncia el teorema de Rolle.

3) (1p) Enuncia el criterio de la derivada tercera y pruébalo en uno de los casos.

4) (1p) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de ordenada 2 a la curva de ecuación $y^2-2xy=1-x$.

5) (1p) Calcula la curvatura de la función $f(x)=(-1-2x)\cdot e^{-2x}$ en el punto de abscisa 0.

NOTA: La curvatura de la función f en el punto de abscisa x_0 viene dada por la fórmula:

$$C(x_0)=\frac{f''(x_0)}{(1+[f'(x_0)]^2)^{3/2}}$$

6) (1p) Halla el punto de la gráfica de la función $y=\text{arc tg}(x-1)$ en el que ésta tiene mayor pendiente.

7) (1p) Halla:

$$\lim_{x\to+\infty}[x(e^{1/x}-1)]$$

8) (1p) Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $y=x^3+ax^2+bx+5$ tenga en $x=1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

9) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{4x-12}{(x-2)^2}$$

Ejercicio 4: Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de ordenada 2 a la curva de ecuación $y^2-2xy=1-x$. (1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Calculamos la abscisa del punto de tangencia:

$$y^2-2xy=1-x \overset{1}{\Rightarrow} 4-4x=1-x \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$$

2º) Para hallar la pendiente, primero derivamos la función:[2]

$$y^2-2xy=1-x \Rightarrow 2yy'-2y-2xy'=-1$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$2yy'-2y-2xy'=-1 \overset{3}{\Rightarrow} 4y'-4-2y'=-1 \Rightarrow 2y'=3 \Rightarrow y'=3/2$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	2	3/2

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-2=\frac{3}{2}\cdot(x-1) \Rightarrow y-2=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$$

[1] Ya que y=2.
[2] Por el método de derivación implícita.
[3] En el punto de tangencia, x=1 e y=2.

Ejercicio 5: *Calcula la curvatura de la función $f(x)=(-1-2x)\cdot e^{-2x}$ en el punto de abscisa 0.*

NOTA: La curvatura de la función f en el punto de abscisa x_0 viene dada por la fórmula:

$$C(x_0)=\frac{f''(x_0)}{(1+[f'(x_0)]^2)^{3/2}}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Calculamos la derivada de f:

$$f'(x)=-2\cdot e^{-2x}+(-1-2x)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=e^{-2x}\cdot(-2+2+4x)=4x\cdot e^{-2x}$$

Calculamos la derivada segunda de f:

$$f''(x)=4\cdot e^{-2x}+4x\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=e^{-2x}\cdot(4-8x)=(4-8x)\cdot e^{-2x}$$

Hallamos el valor de estas derivadas en x=0:

$$f'(0)=0$$

$$f''(0)=4$$

En consecuencia:

$$C(0)=\frac{f''(0)}{(1+[f'(0)]^2)^{3/2}}=\frac{4}{1}=4$$

Ejercicio 6: *Halla el punto de la gráfica de la función $y=\operatorname{arc\,tg}(x-1)$ en el que ésta tiene mayor pendiente.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

La pendiente (o sea, la derivada) tiene que ser máxima:

$$m=y'=\frac{1}{1+(x-1)^2}=\frac{1}{1+x^2-2x+1}=\frac{1}{x^2-2x+2}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$m'=\frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

Como[1] $D=(x^2-2x+2)^2>0$, para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir[2] m'' por N', donde $N=-(2x-2)=2-2x$:

$$N'=-2 \Rightarrow N'(1)=-2<0 \Rightarrow m \text{ es máxima en } x=1$$

Ahora bien, si $x=1$, entonces $y=\operatorname{arc\,tg} 0=0$.

Por tanto, el punto es $P(1,0)$.

[1] Designamos por D al denominador de la derivada y por N al numerador.

[2] Ya que los signos de N' y m" coinciden en x=1.

Ejercicio 7: *Halla el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to+\infty}[x(e^{1/x}-1)]$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}[x(e^{1/x}-1)] \stackrel{1}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

[1] Ya que $e^f-1\sim f$ si f es un infinitésimo. También puede hacerse por L'Hôpital, aunque antes hay que transformar la expresión indeterminada $\infty\cdot 0$ en la indeterminación $0/0$.

Ejercicio 8: *Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $y=x^3+ax^2+bx+5$ tenga en $x=1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Teniendo en cuenta la condición necesaria de punto de inflexión y el dato de que la tangente de inflexión es horizontal, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y"
1		0	0

Como $y=x^3+ax^2+bx+5$, entonces $y'=3x^2+2ax+b$ e $y''=6x+2a$.

Como el punto (1,0) pertenecen a las gráficas de las funciones y" e y', tenemos lo siguiente:

$$y''(1)=0 \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \overset{1}{\Rightarrow} 3-6+b=0 \Rightarrow b=3$$

[1] Ya que a=-3.

Ejercicio 9: *Estudia y representa la gráfica de la función:*

$$f(x)=\frac{4x-12}{(x-2)^2}$$ (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio no es simétrico respecto del origen de coordenadas, la función no es ni par ni impar.

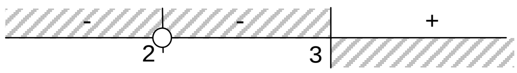
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow 4x-12=0 \Rightarrow 4x=12 \Rightarrow x=3$.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=-12/4 \Rightarrow y=-3$.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta $x=2$ es asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{4x-12}{(x-2)^2}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

b) La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-12}{(x-2)^2}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{2(x-2)}=\frac{2}{\pm\infty-2}=0$$

Como la asíntota horizontal coincide con el eje de abscisas, la posición relativa con respecto a la gráfica de la función ya se conoce por el estudio del signo de la función.

7º) Continuidad. Discontinuidades:

a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x)=\frac{4x-12}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{4(x-2)^2-(4x-12)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{4(x-2)-2\cdot(4x-12)}{(x-2)^3}=$$

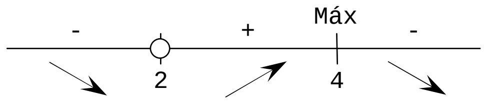
$$=\frac{4x-8-8x+24}{(x-2)^3}=\frac{16-4x}{(x-2)^3}=\frac{4\cdot(4-x)}{(x-2)^3}$$

b) La función presenta en $x=2$ una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

[1] Hemos señalado $x=2$ para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

[2] Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación. O teniendo en cuenta que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n \sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

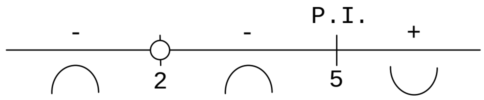
8º) Signo de la derivada primera:[1]



9º) Signo de la derivada segunda:[2]

$$f'(x)=\frac{16-4x}{(x-2)^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{-4\cdot(x-2)^3-(16-4x)\cdot 3\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6}=$$

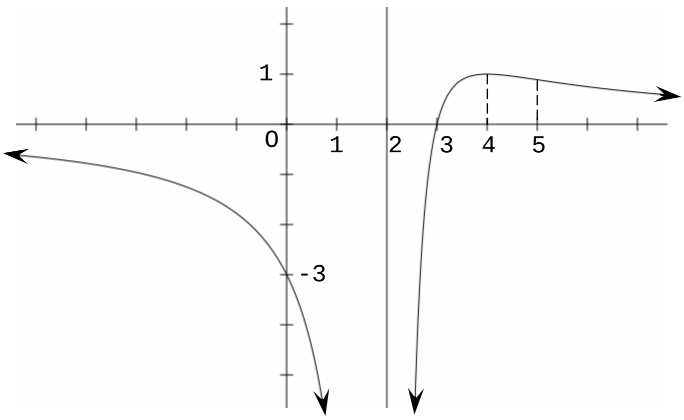
$$=\frac{-4\cdot(x-2)-3\cdot(16-4x)}{(x-2)^4}=\frac{-4x+8-48+12x}{(x-2)^4}=\frac{8x-40}{(x-2)^4}=\frac{8(x-5)}{(x-2)^4}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
3	0	Corte con OX
0	-3	Corte con OY
4	1	Máximo
5	8/9	Punto de inflexión

Gráfica:



[1] Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

[2] Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.