30 de noviembre de 2007.

1) (1p) Demuestra la derivada de $f(x)=\operatorname{sen} x$.

2) (1p) Enuncia el teorema de Rolle.

3) (1p) Define función convexa en un punto.

4) (1p) Calcula b y c para que la función f sea continua y derivable en x=0:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

5) (1p) Deriva y simplifica la siguiente función:

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x-x^2}$$

6) (1p) Halla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

7) (1p) ¿Cuál es el ángulo del sector circular de perímetro P que tiene área máxima?

8) (1p) Estudia la monotonía, los extremos, la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de $y=(1+x^2)\cdot e^x$.

9) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+4}{2x}$$

Ejercicio 4: *Calcula b y c para que la función f sea continua y derivable en x=0:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Si f es continua en x=0, entonces c=1:

- $f(0)=c$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x^2+bx+c) = c; \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \overset{1}{=} 1$

2º) Si f es derivable en x=0, entonces b=-1/2:

- $f'_-(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{2}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2+bx+1-1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x+b) = b$

- $f'_+(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{2}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1}{x} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} \overset{4}{=}$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x} \overset{5}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1-1-x}{2x(1+x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{-1}{2(1+x)} = -1/2$$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:[6]

- $f'_-(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2+bx+c-c}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x+b) = b$

- $f'_+(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}-c}{x} \overset{3}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)-cx}{x^2} \overset{4}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\dfrac{1}{1+x}-c}{2x} \overset{5}{=}$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1-c-cx}{2x(1+x)} = \dfrac{1-c}{0^+} \overset{7}{\Rightarrow} 1-c=0 \Rightarrow c=1 \Rightarrow f'_+(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1-1-x}{2x(1+x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{-1}{2(1+x)} = \dfrac{-1}{2}$$

Por tanto, b=-1/2; con lo que llegamos al mismo resultado que antes.

---

1 Ya que, en x=0, ln(1+x)~x. Como sale la indeterminación 0/0 (para obtenerla aplicamos al numerador la regla del límite de la composición), también puede hacerse por L'Hôpital.
2 Ya que c=1.
3 Multiplicamos numerador y denominador por x.
4 Como sale la expresión indeterminada 0/0, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado en el numerador la regla del límite de la composición.
5 Multiplicamos numerador y denominador por 1+x.
6 Ya que la derivabilidad implica la continuidad.
7 Si 1-c≠0, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en x=0.

Ejercicio 5: *Deriva y simplifica la siguiente función:*

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x-x^2}$$ *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

$$y'=1\cdot \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2x}{2\cdot\sqrt{x-x^2}}=$$

$$=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}+\frac{1-2x}{4\cdot\sqrt{x-x^2}}=$$

$$=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+\frac{2x-1}{4\cdot\sqrt{x-x^2}}+\frac{1-2x}{4\cdot\sqrt{x-x^2}}=$$

$$=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+\frac{2x-1+1-2x}{4\cdot\sqrt{x-x^2}}=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada carece de sentido para $x=0$ y $x=1$, el resultado final es aplicable también para ellos. En efecto, como la función f es continua en dichos puntos:[1]

- $f'(0)\overset{2}{=}f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}\overset{3}{=}0$
- $f'(1)\overset{2}{=}f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}\overset{3}{=}\pi/2$

Por tanto, $f'(x)=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}$ y $Dom(f')=Dom(f)=[0,1]$.

---

[1] Es fácil probarlo.
[2] Ya que $Dom(f)=[0,1]$.
[3] Para calcular este límite hemos aplicado la regla del límite de la composición.

Ejercicio 6: Halla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cdot(1+\sqrt{\cos x})} \overset{2}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2\cdot(1+\sqrt{\cos x})} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cdot(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2\cdot(1+\sqrt{1})}=1/4$$

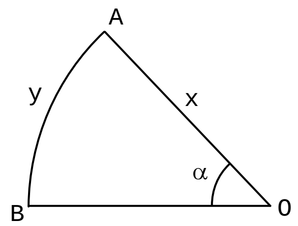
[1] Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador. También puede hacerse por L'Hôpital.
[2] Ya que, en $x=0$, $1-\cos x \sim x^2/2$.

Ejercicio 7: *¿Cuál es el ángulo del sector circular de perímetro P que tiene área máxima?* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Sea OAB el sector circular de ángulo α, radio x y longitud de arco y:



El área del sector tiene que ser máxima:

$$A=\frac{1}{2}\cdot xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$P=2x+y \Rightarrow y=P-2x \Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(P-2x)=\frac{Px-2x^2}{2}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A'=\frac{P-4x}{2}=0 \Rightarrow P-4x=0 \Rightarrow 4x=P \Rightarrow x=P/4$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en x=P/4:

$$A''=\frac{-4}{2}=-2 \Rightarrow A''(P/4)=-2<0 \Rightarrow A \text{ es máxima en } x=P/4$$

Por último:

$$x=P/4 \Rightarrow y=P-P/2=P/2 \overset{2}{\Rightarrow} P/2=\alpha\cdot P/4 \Rightarrow \alpha=\frac{P/2}{P/4}=2 \text{ rad.}$$

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.
[2] Ya que el arco es igual al ángulo (medido en radianes) por el radio.

Ejercicio 8: *Estudia la monotonía, los extremos, la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de $y=(1+x^2)\cdot e^x$.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

a) Para estudiar la monotonía aplicamos el criterio de la derivada primera:

$$y'=2x\cdot e^x+(1+x^2)\cdot e^x=(x^2+2x+1)\cdot e^x=(x+1)^2\cdot e^x$$

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
f' es	+	+
f es	creciente	creciente

Como la función f es continua en x=-1 (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, la función es creciente también en x=-1. Por tanto, es creciente en R.

b) Para estudiar la curvatura aplicamos el criterio de la derivada segunda:

$$y''=2(x+1)\cdot e^x+(x+1)^2\cdot e^x=(2+x+1)(x+1)e^x=(x+1)(x+3)e^x$$

Intervalos	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,+\infty)$
f" es	+	-	+
f es	convexa	cóncava	convexa

Como la función f' es continua en x=-3 y x=-1 (por ser derivable en dichos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,[1] la función tiene puntos de inflexión en x=-3 y x=-1, de ordenadas respectivas $y=10/e^3$ e $y=2/e$.

[1] El estudio de los puntos de inflexión puede hacerse también con el criterio de la derivada tercera.

Ejercicio 9: *Estudia y representa la gráfica de la función:*

$$f(x)=\frac{x^2+4}{2x}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio es simétrico respecto del origen de coordenadas, calculamos f(-x):

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+4}{2\cdot(-x)}=-\frac{x^2+4}{2x}=-f(x)$$

La función es impar.

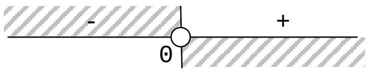
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow$ no hay puntos de corte.

b) Con OY: como $x\neq 0$, no hay puntos de corte.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta x=0 es asíntota vertical:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2+4}{2x}=\frac{4}{0^-}=-\infty;\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2+4}{2x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

b) La recta y=x/2 es asíntota oblicua en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{2x}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2}=\pm\infty$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{2x^2}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}=1/2$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+4}{2x}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4-x^2}{2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{2x}=0$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{x^2+4}{2x}-\frac{x}{2}=\frac{x^2+4-x^2}{2x}=\frac{4}{2x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativo en $-\infty$ y positivo en $+\infty$, la función está situada por debajo de la asíntota en $-\infty$ y por encima en $+\infty$.

---

[1] Hemos señalado el origen para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

[2] Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n\sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación. O aplicando L'Hôpital.

7º) Continuidad. Discontinuidades:

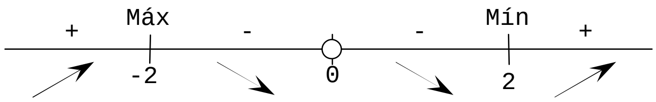
a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x)=\frac{x^2+4}{2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot 2x-(x^2+4)2}{4x^2}=\frac{4x^2-2x^2-8}{4x^2}=$$

$$=\frac{2x^2-8}{4x^2}=\frac{2(x^2-4)}{4x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{2x^2}$$

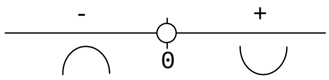
b) La función presenta en x=0 una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

8º) Signo de la derivada primera:[1]



9º) Signo de la derivada segunda:[2]

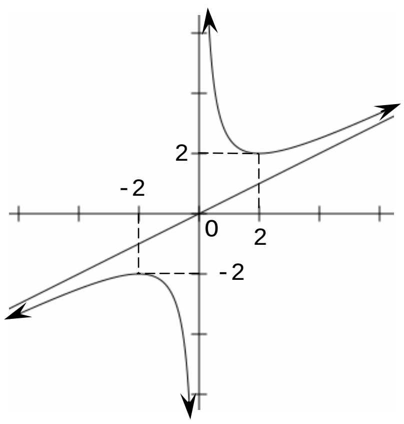
$$f'(x)=\frac{x^2-4}{2x^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2x\cdot 2x^2-(x^2-4)\cdot 4x}{4x^4}=\frac{4x^3-4x^3+16x}{4x^4}=\frac{4}{x^3}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
-2	-2	Máximo
2	2	Mínimo

Gráfica:



[1] Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.
[2] Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.