5 de diciembre de 2002.

1) (4p) Teoría:

a) Define derivada de una función en un punto.

b) Halla la derivada de $y=a^u$, donde a es una constante positiva distinta de 1 y u es una función de x.

c) Enuncia la condición necesaria de extremo relativo.

d) Define punto de inflexión.

2) (1p) Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, halla la derivada de $f(x)=\sqrt{x}\cdot \operatorname{sen} x$ en $x=0$.

3) (1p) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\cos(x+y)$ en el punto $(\pi/2,0)$.

4) (1p) Un empresario tiene que fabricar recipientes abiertos por arriba, de base cuadrada y con una capacidad de 4000 litros. Calcula las dimensiones que debe tener el recipiente para que el coste del material empleado sea el mínimo posible.

5) (1p) Calcula a, b y c si se sabe que la derivada de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ en el punto (1,1) es cero, pero que en ese punto la función f no tiene un extremo.

6) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:[1]

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$

[1] No es seguro que ésta fuera la gráfica que se puso este curso.

Ejercicio 2: *Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, halla la derivada de $f(x)=\sqrt{x}\cdot \operatorname{sen} x$ en $x=0$.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\cdot \operatorname{sen} x-0}{x}\overset{1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\cdot x}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$$

[1] Ya que, en $x=0$, $\operatorname{sen} x \sim x$.

Ejercicio 3: *Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función y=cos(x+y) en el punto (π/2,0).* *(1 PUNTO)*

** * **

Solución:

1º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:[1]

$$y'=-\mathrm{sen}(x+y)\cdot(x+y)'=-\mathrm{sen}(x+y)\cdot(1+y')$$

2º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y' \overset{2}{=} -\mathrm{sen}(\pi/2)\cdot(1+y')=-1-y' \Rightarrow 2y'=-1 \Rightarrow y'=-1/2$$

Resumiendo:

x	y	y'
π/2	0	-1/2

3º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y-0=-\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{\pi}{4}$$

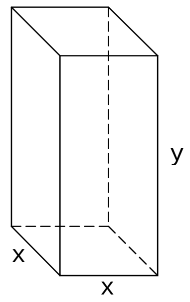
[1] Por el método de derivación implícita.
[2] Ya que x=π/2 e y=0.

Ejercicio 4: *Un empresario tiene que fabricar recipientes abiertos por arriba, de base cuadrada y con una capacidad de 4000 litros. Calcula las dimensiones que debe tener el recipiente para que el coste del material empleado sea el mínimo posible.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Sean x e y, respectivamente, la longitud del lado de la base y la altura del recipiente:



El área total del recipiente es mínima:

$$A = x^2 + 4xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$V=4000 \Rightarrow 4000=x^2 \cdot y \Rightarrow y=\frac{4000}{x^2} \Rightarrow A = x^2+4x\cdot\frac{4000}{x^2}=x^2+\frac{16000}{x}=\frac{x^3+16000}{x}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A'=\frac{3x^3-x^3-16000}{x^2}=\frac{2x^3-16000}{x^2}=0 \Rightarrow 2x^3=16000 \Rightarrow x^3=8000 \Rightarrow x=20$$

Como[1] $D = x^2 > 0$, para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir[2] A" por N', donde $N = 2x^3-16000$:

$$N'=6x^2 \Rightarrow N'(20)=6\cdot 400>0 \Rightarrow A \text{ es mínima para } x=20$$

Por último,[3] si x=20 dm, entonces y=4000/400=10 dm.

[1] Designamos por D al denominador de la derivada y por N al numerador.
[2] Ya que los signos de N' y A" coinciden en x=20.
[3] 1 litro es 1 dm^3.

Ejercicio 5: *Calcula a, b y c si se sabe que la derivada de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ en el punto (1,1) es cero, pero que en ese punto la función f no tiene un extremo.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Si $f''(1)\neq 0$, entonces, como $f'(1)=0$ y $Dom(f')=R$, por el criterio de la derivada segunda la función f tendría un extremo en x=1. Pero no lo tiene. Por tanto $f''(1)=0$. Podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y"
1	1	0	0

Como $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, entonces $f'(x)=3x^2+2ax+b$ y $f''(x)=6x+2a$.

Como el punto (1,0) pertenece a las gráficas de las funciones f" y f', y el punto (1,1) pertenece a la gráfica de la función f, tenemos lo siguiente:

$$f''(1)=0 \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \overset{1}{\Rightarrow} 3-6+b=0 \Rightarrow b=3$$

$$f(1)=1 \Rightarrow 1+a+b+c=1 \overset{2}{\Rightarrow} -3+3+c=0 \Rightarrow c=0$$

1 Ya que a=-3.

2 Ya que a=-3 y b=3.

Ejercicio 6: *Estudia y representa la gráfica de la función:*

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$ (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio es simétrico respecto del origen de coordenadas, calculamos f(-x):

$$f(-x)=\frac{-x}{x^2-4}=-\frac{x}{x^2-4}=-f(x)$$

La función es impar.

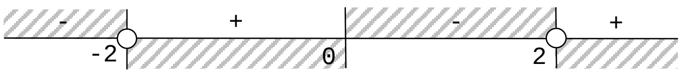
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x=0$.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=0$.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) Las rectas x=-2 y x=2 son asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2}{-4\cdot 0^-}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2}{-4\cdot 0^+}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{0^-\cdot 4}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{0^+\cdot 4}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

b) La recta y=0 es asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-4}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

Como la asíntota horizontal coincide con el eje de abscisas, la posición relativa con respecto a la gráfica de la función ya se conoce por el estudio del signo de la función.

---

[1] Hemos señalado los puntos x=-2 y x=2 para recordarnos que no pertenecen al dominio de la función.

[2] Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n \sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación. O por L'Hôpital.

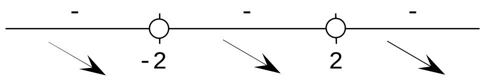
7º) Continuidad. Discontinuidades:

a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}=\frac{-(x^2+4)}{(x+2)^2(x-2)^2}$$

b) La función presenta en x=-2 y en x=2 discontinuidades de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

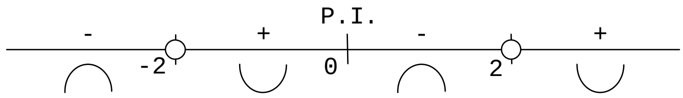
8º) Signo de la derivada primera:[1]



9º) Signo de la derivada segunda:[2]

$$f'(x)=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2x(x^2-4)^2+(x^2+4)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4}=$$

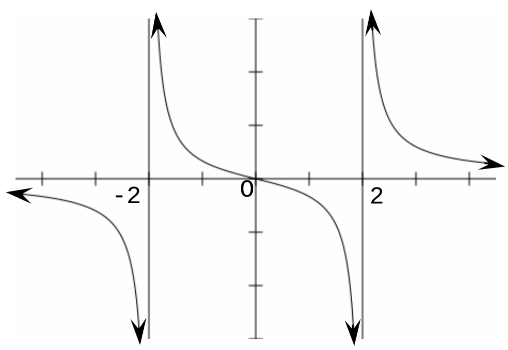
$$=\frac{-2x(x^2-4)+4x(x^2+4)}{(x^2-4)^3}=\frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3}=\frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}=\frac{2x(x^2+12)}{(x+2)^3(x-2)^3}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
0	0	Corte con los ejes y punto de inflexión

Gráfica:



[1] Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

[2] Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.