

15 de diciembre de 2000.

1) (4p) Demuestra las siguientes afirmaciones:¹

a) Si $y = \cos u$, $y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$.

b) Si $y = \operatorname{arcsen} u$, $y' = u' / \sqrt{1-u^2}$.

c) Si $y = a^u$, $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ (a es un número real positivo).

d) Si $y = u^r$, $y' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'$ (r es un número real).

2) (1p) Halla el valor de los parámetros a y b para que la función siguiente sea derivable en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} a(1+e^x) & \text{si } x < 0 \\ b + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3) (1p) Deriva y simplifica (o viceversa) la función:

$$y = \operatorname{sen}^2 \operatorname{arccos} x^2$$

4) (1p) Dada la función $y = (1+x) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x+4}$, se pide:

a) Su derivada simplificada.

b) La tangente y la normal en el punto de abscisa $x=0$.

5) (1p) En un rectángulo de 4 m de perímetro se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores. Halla las dimensiones que debemos dar a los lados para que el área de la figura resultante sea mínima.

6) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:²

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

¹ u es una función de x .

² No es seguro que ésta fuera la gráfica que se puso este curso.

Ejercicio 2: Halla el valor de los parámetros a y b para que la función siguiente sea derivable en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} a(1+e^x) & \text{si } x < 0 \\ b + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

Si $x \neq 0$, la derivada de f es:

$$f'(x) = \begin{cases} a \cdot e^x & \text{si } x < 0 \\ 1/(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si f es continua¹ en $x=0$, entonces $b=2a$:

- $f(0) = b$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} [a(1+e^x)] = 2a$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [b + \ln(1+x)] \stackrel{2}{=} b$

Si f es derivable en $x=0$, entonces $a=1$ (y, por tanto, $b=2$):

- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (a \cdot e^x) = a$
- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [1/(1+x)] = 1$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:

- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{a(1+e^x) - b}{x} = \frac{2a - b}{0^-} \stackrel{3}{\Rightarrow} 2a - b = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{a(1+e^x) - b}{x} \stackrel{4}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{a \cdot e^x}{1} = a$
- $f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{b + \ln(1+x) - b}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{5}{=} 1$

Por tanto, para que la función sea derivable, $a=1$. Y como $2a-b=0$, entonces $b=2$. Llegamos, pues, al mismo resultado que antes.

¹ Si f es derivable en $x=0$, debe ser continua en dicho punto.

² Para calcular el límite del segundo sumando aplicamos la regla del límite de la composición.

³ Si $2a-b \neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en $x=0$.

⁴ Como sale la indeterminación $0/0$, ya que $2a-b=0$, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sustituyendo b por $2a$ y utilizando el hecho de que, en $x=0$, $e^x - 1 \sim x$.

⁵ Ya que, en $x=0$, $\ln(1+x) \sim x$. También puede hacerse por L'Hôpital.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica (o viceversa) la función:

$$y = \text{sen}^2 \text{arc} \cos x^2$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Si hacemos el cambio $\text{arc} \cos x^2 = z$, la función queda:

$$y = \text{sen}^2 z$$

Ahora bien:

$$\text{arc} \cos x^2 = z \Rightarrow \cos z = x^2 \Rightarrow \cos^2 z = x^4 \Rightarrow y = \text{sen}^2 z = 1 - \cos^2 z = 1 - x^4$$

Por tanto:

$$y' = -4x^3$$

* * *

O también:

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot \text{sen} \text{arc} \cos x^2 \cdot (\text{sen} \text{arc} \cos x^2)' = \\ &= 2 \cdot \text{sen} \text{arc} \cos x^2 \cdot \cos \text{arc} \cos x^2 \cdot (\text{arc} \cos x^2)' = \\ &= 2 \cdot \text{sen} \text{arc} \cos x^2 \cdot \cos \text{arc} \cos x^2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x \stackrel{1}{=} \\ &= \frac{-4x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \text{sen} z \cdot \cos z \stackrel{2}{=} \frac{-4x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \sqrt{1-x^4} \cdot x^2 = -4x^3 \end{aligned}$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada por este procedimiento carece de sentido para $x=-1$ y $x=1$, el resultado final es aplicable también para ellos. En efecto, como la función y es continua en dichos puntos:³

- $y'(-1) \stackrel{4}{=} y'_+(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} y'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (-4x^3) = 4$
- $y'(1) \stackrel{4}{=} y'_-(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} y'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (-4x^3) = -4$

Por tanto, $y'(x) = -4x^3$ y $\text{Dom}(y') = \text{Dom}(y) = [-1, 1]$.

¹ Si $\text{arc} \cos x^2 = z$.

² $\text{arc} \cos x^2 = z \Rightarrow \cos z = x^2 \Rightarrow \cos^2 z = x^4 \Rightarrow \text{sen}^2 z = 1 - \cos^2 z = 1 - x^4$.

³ Es fácil probarlo.

⁴ Ya que $\text{Dom}(y) = [-1, 1]$.

Ejercicio 4: Dada la función $y=(1+x)\cdot\text{arc tg}\sqrt{x}-\sqrt{x+4}$, se pide: **a)** su derivada simplificada; **b)** la tangente y la normal en el punto de abscisa $x=0$.

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

1º) Derivamos la función:

$$\begin{aligned} y' &= \text{arc tg}\sqrt{x} + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \text{arc tg}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \text{arc tg}\sqrt{x} \end{aligned}$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada carece de sentido para $x=0$, el resultado final es aplicable también para él. En efecto, como la función y es continua en dicho punto:¹

$$y'(0) \stackrel{2}{=} y'_+(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} y'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \text{arc tg}\sqrt{x} \stackrel{3}{=} 0$$

Por tanto, $y'(x) = \text{arc tg}\sqrt{x}$ y $\text{Dom}(y') = \text{Dom}(y) = [0, +\infty)$.

2º) Calculamos la ordenada en el punto de tangencia:

$$y(0) = 1 \cdot \text{arc tg} 0 - 0 + 4 = 4$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(0) = \text{arc tg} 0 = 0$$

Resumiendo:

x	y	y'
0	4	0

4º) Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-4=0 \cdot (x-0) \Rightarrow y=4$$

Y la de la normal:⁴

$$x=0$$

¹ Es fácil probarlo.

² Ya que $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$.

³ Para calcular este límite hemos aplicado la regla del límite de la composición.

⁴ Ya que la perpendicular a la recta horizontal $y=4$ que pasa por el punto $P(0,4)$ es la recta vertical $x=0$.

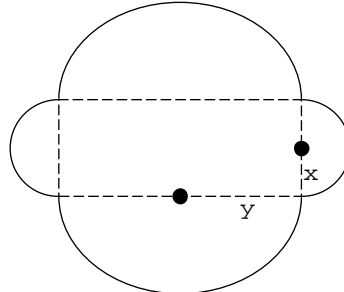
Ejercicio 5: En un rectángulo de 4 m de perímetro se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores. Halla las dimensiones que debemos dar a los lados para que el área de la figura resultante sea mínima.

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sean x e y la mitad de las longitudes de los lados del rectángulo:



El área del recinto es mínima:

$$A = \pi x^2 + \pi y^2 + 4xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$\begin{aligned} 4x + 4y = 4 &\Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow A = \pi x^2 + \pi(1-x)^2 + 4x(1-x) = \\ &= \pi x^2 + \pi(1 - 2x + x^2) + 4x - 4x^2 = \pi x^2 + \pi - 2\pi x + \pi x^2 + 4x - 4x^2 = (2\pi - 4)x^2 + (4 - 2\pi)x + \pi = \\ &= 2(\pi - 2)x^2 - 2(\pi - 2)x + \pi \end{aligned}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A' = 4(\pi - 2)x - 2(\pi - 2) = 2(\pi - 2)(2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 1/2$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,¹ derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $x = 1/2$:

$$A'' = 4(\pi - 2) \Rightarrow A''(1/2) = 4(\pi - 2) > 0 \Rightarrow A \text{ es mínima para } x = 1/2$$

Si $x = 1/2$, entonces $y = 1/2$.

Por tanto, se trata del cuadrado de lado 1 m.

¹ También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 6: Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio no es simétrico respecto del origen de coordenadas, la función no es ni par ni impar.

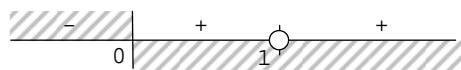
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=0$.

5º) Signo de la función:¹



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta $x=1$ es asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

b) La recta $y=x+2$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 = 2 \end{aligned}$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - (x + 2) = \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x - 2x^2 + 4x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$ y positiva en $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota en $-\infty$ y por encima en $+\infty$.

¹ Hemos señalado el punto $x=1$ para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

² Ya que $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \sim a_n \cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x , simplificando a continuación. O por L'Hôpital.

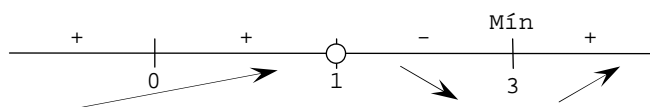
7º) Continuidad. Discontinuidades:

a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} =$$
$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

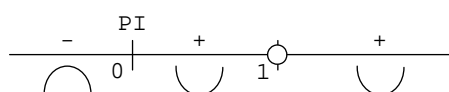
b) La función presenta en $x=1$ una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

8º) Signo de la derivada primera:¹



9º) Signo de la derivada segunda:²

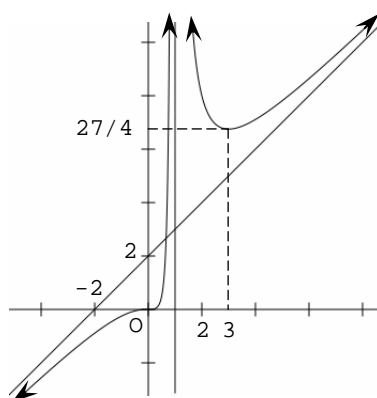
$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$
$$= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
0	0	Corte con los ejes y punto de inflexión
3	27/4	Mínimo

Gráfica:



¹ Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

² Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.