1) (1,5p) Define:

a) Menor complementario.

b) Base.

c) Producto mixto.

2) (1,5p) Prueba que, si $\vec{a}\neq\vec{0}\neq\vec{b}$, $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\mathrm{sen}(\vec{a},\vec{b})$.

3) (1,7p) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & x & x \\ x & x+2 & x & x \\ x & x & x+2 & x \\ x & x & x & x+2 \end{vmatrix}=0$$

4) (1,8p) Si el determinante de la matriz de coeficientes del siguiente sistema vale 3, resuélvelo por Cramer:

$$\begin{cases} (a^2-2)x+(a-1)y=-1 \\ (a-1)x+ay=a \end{cases}$$

5) (1,7p) Calcula x para que el módulo de la proyección del vector $\vec{a}=(x,-1,5)$ sobre el vector $\vec{b}=(1,2,-2)$ sea 3 y el ángulo $(\vec{a},\vec{b})$ sea obtuso.

6) (1,8p) Si $\vec{a}=(-2,-1,0)$, $\vec{b}=(0,-1,1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$ y $\vec{d}=(1,0,2)$, comprueba la siguiente identidad:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d})=\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

Ejercicio 3: *Resuelve la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & x & x \\ x & x+2 & x & x \\ x & x & x+2 & x \\ x & x & x & x+2 \end{vmatrix}=0$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & x & x \\ x & x+2 & x & x \\ x & x & x+2 & x \\ x & x & x & x+2 \end{vmatrix}=0 \overset{1}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 4x+2 & x & x & x \\ 4x+2 & x+2 & x & x \\ 4x+2 & x & x+2 & x \\ 4x+2 & x & x & x+2 \end{vmatrix}=0 \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4x+2 & x & x & x \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \overset{3}{\Rightarrow} (4x+2)\cdot 2\cdot 2\cdot 2=0 \Rightarrow 4x+2=0 \Rightarrow x=-1/2$$

1 1ªc+2ªc+3ªc+4ªc.

2 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf; 4ªf-1ªf.

3 El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 4: *Si el determinante de la matriz de coeficientes del siguiente sistema vale 3, resuélvelo por Cramer:*

$$\begin{cases}(a^2-2)x+(a-1)y=-1\\(a-1)x+ay=a\end{cases}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix}a^2-2 & a-1\\ a-1 & a\end{vmatrix}=3 \Rightarrow a^3-2a-(a-1)^2=3 \Rightarrow a^3-2a-a^2+2a-1-3=0 \Rightarrow a^3-a^2-4=0 \overset{1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (a-2)\cdot(a^2+a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}a-2=0 \Rightarrow a=2\\ a^2+a+2=0 \Rightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} \text{ no tiene solución}\end{cases}$$

Por tanto, el sistema es el siguiente:

$$\begin{cases}2x+y=-1\\x+2y=2\end{cases}$$

Aplicamos Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}}{3}=\frac{-2-2}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{3}=\frac{4+1}{3}=\frac{5}{3}$$

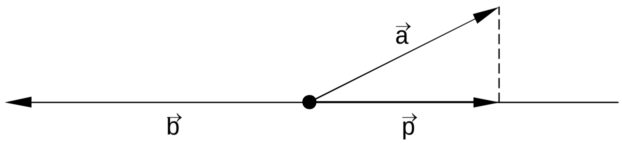
[1] Descomponemos el polinomio por Ruffini.

Ejercicio 5: *Halla x para que el módulo de la proyección del vector $\vec{a}=(x,-1,5)$ sobre el vector $\vec{b}=(1,2,-2)$ sea 3 y el ángulo $(\vec{a},\vec{b})$ obtuso.* *(1,7 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Sea $\vec{p}$ el vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$:



Entonces:

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\cdot\vec{b}=\frac{(x,-1,5)\cdot(1,2,-2)}{(1,2,-2)\cdot(1,2,-2)}\cdot\vec{b}=\frac{x-2-10}{1+4+4}\cdot\vec{b}=\frac{x-12}{9}\cdot\vec{b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{p}|=\left|\frac{x-12}{9}\right|\cdot|\vec{b}| \Rightarrow 3=\left|\frac{x-12}{9}\right|\cdot\sqrt{1+4+4} \Rightarrow 3=\left|\frac{x-12}{9}\right|\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x-12}{9}\right|=1 \Rightarrow \frac{x-12}{9}=\pm 1 \Rightarrow x-12=\pm 9 \Rightarrow \begin{cases} x-12=9 \Rightarrow x=21 \\ x-12=-9 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Por otro lado, como el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es obtuso, su producto escalar es negativo:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x,-1,5)\cdot(1,2,-2)=x-2-10=x-12<0 \Rightarrow x<12 \Rightarrow x=3$$

Ejercicio 6: *Si $\vec{a}=(-2,-1,0)$, $\vec{b}=(0,-1,1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$ y $\vec{d}=(1,0,2)$, comprueba la siguiente identidad:*

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d})=\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos el primer miembro de la identidad:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\vec{c}\wedge\vec{d}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

Por tanto:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d})=(-1,2,2)\cdot(2,-1-1)=-2-2-2=-6$$

2º) Calculamos el segundo miembro de la identidad:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=(-2,-1,0)\cdot(1,1,1)=-2-1+0=-3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=(-2,-1,0)\cdot(1,0,2)=-2+0+0=-2$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=(0,-1,1)\cdot(1,1,1)=0-1+1=0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=(0,-1,1)\cdot(1,0,2)=0+0+2=2$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-6$$