1) (1p) Enuncia cinco propiedades de los determinantes.

2) (1p) Define:

a) Vector libre.

b) Ángulo de dos vectores.

3) (1p) Demuestra que el módulo del producto vectorial de dos vectores no colineales[1] es igual al área del paralelogramo que determinan.

4) (1,7p) Calcula:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

5) (1,8p) Averigua los valores del parámetro k para los que la matriz A no es inversible. Halla su inversa para k=0 utilizando determinantes y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2k \\ 2k+1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6) (1,7p) Si $\vec{a}=(2,-3,6)$ y $\vec{b}=(-1,2,-2)$, halla el vector $\vec{c}$ de módulo $3\cdot\sqrt{42}$, que tiene la dirección de la bisectriz del ángulo $(\vec{a},\vec{b})$ y la primera coordenada positiva.

7) (1,8p) Dados $\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(-1,0,1)$ y $\vec{d}=(0,0,-2)$, comprueba la siguiente identidad:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = \begin{vmatrix} [\vec{a},\vec{b},\vec{d}] & [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \\ \vec{d} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

[1] Linealmente independientes.

Ejercicio 4: Calcula:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{2}{=} 0$$

1 2ªc-1ªc; 4ªc-3ªc.

2 Ya que tiene dos columnas iguales.

Ejercicio 5: *Averigua los valores del parámetro k para los que la matriz A no es inversible. Halla su inversa para k=0 utilizando determinantes y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix}1+k & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2k\\ 2k+1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) La matriz A no es inversible para k=-1/2 y k=1:

$$\begin{vmatrix}1+k & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2k\\ 2k+1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -1-k+4k^2+2k-2k-2k^2=0 \Rightarrow 2k^2-k-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases}k=-1/2\\ k=1\end{cases}$$

b) Si k=0:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-1$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{1} A^*=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{2} (A^*)'=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & -1+1+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0\\ 1+0-1 & -1+1+0 & 0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

[1] Escribimos la adjunta de A.
[2] Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

Ejercicio 6: *Si $\vec{a}=(2,-3,6)$ y $\vec{b}=(-1,2,-2)$, halla el vector $\vec{c}$ de módulo $3\cdot\sqrt{42}$, que tiene la dirección de la bisectriz del ángulo $(\vec{a},\vec{b})$ y la primera coordenada positiva.* (1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos primero un vector que tenga la dirección de la bisectriz del ángulo $(\vec{a},\vec{b})$:

$$\left\{\begin{array}{l}|\vec{a}|=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7\\ |\vec{b}|=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3\end{array}\right. \Rightarrow \vec{d}=3\vec{a}+7\vec{b}=3(2,-3,6)+7(-1,2,-2)=$$

$$=(6,-9,18)+(-7,14,-14)=(-1,5,4)$$

Como $\vec{c}$ tiene la dirección del vector $\vec{d}$:

$$\vec{c}=\alpha\cdot\vec{d}=\alpha\cdot(-1,5,4)=(-\alpha,5\alpha,4\alpha)$$

Como $\vec{c}$ tiene de módulo $3\cdot\sqrt{42}$:

$$|\vec{c}|=3\cdot\sqrt{42} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2+25\alpha^2+16\alpha^2}=3\cdot\sqrt{42} \Rightarrow 42\alpha^2=9\cdot 42 \Rightarrow \alpha^2=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\pm 3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{c}_1=(3,-15,-12)\\ \vec{c}_2=(-3,15,12)\end{array}\right.$$

Por último, como $\vec{c}$ tiene la primera coordenada positiva:

$$\vec{c}=(3,-15,-12)$$

Ejercicio 7: *Dados $\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(-1,0,1)$ y $\vec{d}=(0,0,-2)$, comprueba la siguiente identidad:*

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})=\begin{vmatrix} [\vec{a},\vec{b},\vec{d}] & [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \\ \vec{d} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos el primer miembro de la identidad:

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{c}\wedge\vec{d}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2\vec{j}$$

Por tanto:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{k}=(2,0,2)$$

2º) Calculamos el segundo miembro de la identidad:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2 \qquad [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} [\vec{a},\vec{b},\vec{d}] & [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \\ \vec{d} & \vec{c} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ \vec{d} & \vec{c} \end{vmatrix}=-2\vec{c}-2\vec{d}=-2(-1,0,1)-2(0,0,-2)=(2,0,2)$$