1) (1p) Prueba la siguiente propiedad de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2) (1p) Prueba que el módulo del producto vectorial de dos vectores no colineales es igual al área del paralelogramo que determinan.

3) (1p) Define producto mixto y enuncia sus propiedades.

4) (1,7p) Prueba la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

5) (1,8p) Para qué valores de k es inversible la siguiente matriz. Halla su inversa para k=0 utilizando su determinante y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k^2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

6) (1,7p) Si $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$ y $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, comprueba la siguiente identidad:

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

7) (1,8p) Los vectores $\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{x}$ son coplanarios. Halla $\vec{x}$ si se sabe que $|\vec{x}|=2$ y que $|\vec{x}\wedge\vec{i}|=|\vec{x}\cdot\vec{i}|$.

Ejercicio 4: *Prueba la siguiente identidad:*

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \overset{2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} \overset{3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & a+b+c & 0 \\ 2c & 0 & a+b+c \end{vmatrix} \overset{4}{=} (a+b+c)^3$$

1 1ªf+2ªf+3ªf.
2 2ªc-1ªc; 3ªc-1ªc.
3 2ªc·(-1); 3ªc·(-1).
4 El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 5: *Para qué valores de k es inversible la siguiente matriz. Halla su inversa para k=0 utilizando su determinante y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & k^2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) La matriz A es inversible si $k \neq 1$:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & k^2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 0 & k^2 & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \begin{vmatrix} k^2 & 1 \\ k-1 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$=k^2(1-k)+(1-k)=(1-k)(k^2+1)=0 \Rightarrow 1-k=0 \Rightarrow k=1$$

b) Calculamos la inversa de A para k=0:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} A^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} (A^*)'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|} \stackrel{5}{=} \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ -1+0+1 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ -1+1+0 & 1-1+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

1 $2^a f - 3^a f$.
2 Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.
3 Calculamos la adjunta de A.
4 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.
5 Ya que $|A|=(1-0)(0^2+1)=1$.

Ejercicio 6: *Si $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$ y $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, comprueba la siguiente identidad:*

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos el primer miembro de la identidad:

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{a}\wedge\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{a}\wedge(-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}=-5\vec{i}-7\vec{j}-\vec{k}$$

2º) Calculamos el segundo miembro de la identidad:

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=[(1,-1,2)\cdot(-1,1,-1)]\cdot\vec{b}-[(1,-1,2)\cdot(1,2,0)]\cdot\vec{c}=$$

$$=(-1-1-2)\cdot\vec{b}-(1-2+0)\cdot\vec{c}=-4\cdot(\vec{i}+2\vec{j})+1\cdot(-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=-4\vec{i}-8\vec{j}-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=-5\vec{i}-7\vec{j}-\vec{k}$$

Ejercicio 7: *Los vectores $\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{x}$ son coplanarios. Halla $\vec{x}$ si se sabe que $|\vec{x}|=2$ y que $|\vec{x}\wedge\vec{i}|=|\vec{x}\cdot\vec{i}|$.* *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Sea $\vec{x}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Como $\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{x}$ son coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0 \Rightarrow z+x-y-z=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$$

Por otro lado:

$$|\vec{x}\wedge\vec{i}|=|\vec{x}\cdot\vec{i}| \Rightarrow \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|=|(x,y,z)\cdot(1,0,0)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z\cdot\vec{j}-y\cdot\vec{k}|=|x| \Rightarrow \sqrt{y^2+z^2}=|x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2+z^2=x^2 \overset{1}{\Rightarrow} y^2+z^2=y^2 \Rightarrow z^2=0 \Rightarrow z=0$$

Por último:

$$|\vec{x}|=2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2}=2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=4 \overset{2}{\Rightarrow} 2y^2=4 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$$

Por tanto, hay dos soluciones:

x	y	z	$\vec{x}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$

[1] Ya que x=y.
[2] Ya que z=0 y x=y.