1) (2p) Demuestra (sin desarrollar el determinante) que, si a la segunda columna de una matriz cuadrada de orden tres se le suma la tercera columna multiplicada por un número k, el determinante de la matriz resultante coincide con el de la matriz de partida.

Enuncia las propiedades de los determinantes en las que te basas para esta demostración.

2) (2p) Define producto vectorial. Demuestra que, si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son colineales, $\vec{a}\wedge\vec{b}\perp\vec{a}$ y $\vec{a}\wedge\vec{b}\perp\vec{b}$.

3) (1,5p) Si A=1, B=-1 y C=1, halla D:

$$A=\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -3a & b & c & d \\ -3e & f & g & h \end{vmatrix}$$

4) (1,5p) Para qué valores de λ tiene inversa la matriz A. Halla su inversa para $\lambda=0$ por el método de los determinantes y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

5) (1,5p) Dados los vectores $\vec{a}(2,-3,6)$ y $\vec{b}(-1,2,-2)$, halla el vector $\vec{c}$ de módulo $3\cdot\sqrt{42}$ que tiene la dirección de la bisectriz del ángulo $(\vec{a},\vec{b})$.

6) (1,5p) Si $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ y los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares dos a dos, halla $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.

Ejercicio 3: *Si A=1, B=-1 y C=1, halla D:*

$$A=\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -3a & b & c & d \\ -3e & f & g & h \end{vmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -3a & b & c & d \\ -3e & f & g & h \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3a & c & d \\ -3e & g & h \end{vmatrix} \stackrel{2}{=}$$

$$=5\cdot\left(2\cdot\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} -3\cdot\begin{vmatrix} -3a & d \\ -3e & h \end{vmatrix} -3\cdot\begin{vmatrix} -3a & c \\ -3e & g \end{vmatrix}\right) \stackrel{3}{=}$$

$$=5\cdot\left(2\cdot\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} +9\cdot\begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} +9\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}\right)=$$

$$=5\cdot(2C+9B+9A)=5\cdot[2\cdot1+9\cdot(-1)+9\cdot1]=10$$

---

[1] Desarrollamos el determinante por los elementos de la segunda fila.
[2] Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera fila.
[3] Extraemos fuera el factor -3 de la primera fila de los dos últimos determinantes.

Ejercicio 4: *Para qué valores de λ tiene inversa la matriz A. Halla su inversa para $\lambda=0$ por el método de los determinantes y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix}0 & \lambda^2 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) La matriz A es inversible si $\lambda\neq 1$:

$$\begin{vmatrix}0 & \lambda^2 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 1+\lambda^2-\lambda-\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0 \overset{1}{\Rightarrow} (\lambda-1)(\lambda^2+1)=0 \Rightarrow \lambda=1$$

b) Si $\lambda=0$:

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \overset{2}{\rightarrow} A^*=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \overset{3}{\rightarrow} (A^*)'=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|} \overset{4}{=} (A^*)'=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0\\ -1+0+1 & 1+0+0 & 0+0+0\\ -1+1+0 & 1-1+0 & 0+1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

---

1 Descomponemos el polinomio en factores por Ruffini.
2 Escribimos la adjunta de A.
3 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.
4 Ya que |A|=1.

Ejercicio 5: *Dados los vectores $\vec{a}(2,-3,6)$ y $\vec{b}(-1,2,-2)$, halla el vector $\vec{c}$ de módulo $3\cdot\sqrt{42}$ que tiene la dirección de la bisectriz del ángulo $(\vec{a},\vec{b})$.* *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Calculamos primero un vector que tenga la dirección de la bisectriz del ángulo $(\vec{a},\vec{b})$:

$$\left\{\begin{array}{l}|\vec{a}|=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7\\ |\vec{b}|=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3\end{array}\right. \Rightarrow \vec{d}=3\vec{a}+7\vec{b}=3(2,-3,6)+7(-1,2,-2)=$$

$$=(6,-9,18)+(-7,14,-14)=(-1,5,4)$$

Como $\vec{c}$ tiene la dirección del vector $\vec{d}$:

$$\vec{c}=\alpha\cdot\vec{d}=\alpha\cdot(-1,5,4)$$

Como $\vec{c}$ tiene de módulo $3\cdot\sqrt{42}$:

$$|\vec{c}|=3\cdot\sqrt{42} \overset{1}{\Rightarrow} |\alpha|\cdot\sqrt{1+25+16}=3\cdot\sqrt{42} \Rightarrow |\alpha|\cdot\sqrt{42}=3\cdot\sqrt{42} \Rightarrow |\alpha|=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\pm 3 \Rightarrow \vec{c}=\pm 3(-1,5,4)$$

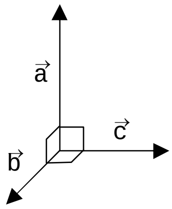
[1] El módulo del producto de un número por un vector es igual al producto del valor absoluto del número por el módulo del vector.

Ejercicio 6: *Si $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ y los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares dos a dos, halla $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.* (1,5 PUNTOS)

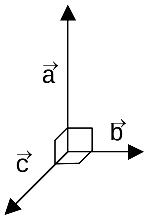
* * *

Solución:

Si los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son perpendiculares dos a dos, el ángulo $(\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c})$ es de 0º o de 180º:



$(\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c})=0^\circ$



$(\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c})=180^\circ$

Por tanto:

$$|\vec{b}\wedge\vec{c}|=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\text{sen}(\vec{b},\vec{c})=2\cdot 3\cdot\text{sen}\,90^\circ=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}\wedge\vec{c}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}\wedge\vec{c})=4\cdot 6\cdot(\pm 1)=\pm 24$$