6 de abril de 2001.

1) (1p) Demuestra que, si se multiplica la segunda columna de una matriz cuadrada de orden tres por un número $\lambda \neq 0$, el determinante de la matriz resultante es igual al producto de λ por el determinante de la matriz de partida.

2) (1p) Define base. Prueba que $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

3) (1p) Prueba que, si $\vec{a}\neq\vec{0}\neq\vec{b}$, $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \text{sen}(\vec{a},\vec{b})$.

4) (1p) Define producto mixto. Halla su expresión analítica.

5) (1p) Calcula razonadamente el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

6) (1p) Resuelve por Cramer el siguiente sistema y comprueba el resultado:

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ x+y-z=2 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$$

7) (1p) Dada la matriz A, halla su inversa mediante determinantes y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8) (1p) Si A es una matriz cuadrada de orden tres y su determinante vale 8, halla el determinante de la matriz $2\cdot A$.

9) (2p) Si $\vec{a}(1,-1,2)$ y $\vec{b}(2,1,3)$, calcula:

a) $(\vec{a},\vec{b})$
b) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$
c) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})$
d) $\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})$

Ejercicio 5: *Calcula razonadamente el determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \frac{1}{4}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \frac{1}{4}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -15 & 10 \\ 0 & -15 & -15 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{3}{=}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & -15 & 10 \\ -15 & -15 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{4}{=} \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -15 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{5}{=}$$

$$=3\cdot(-5-75-75+125-3-75)=3\cdot(-108)=-324$$

1 2ªf·2; 3ªf·2.
2 2ªf-3·1ªf; 3ªf-5·1ªf.
3 Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.
4 Extraemos fuera del determinante los factores 3 y 2 de las columnas segunda y tercera, respectivamente.
5 Desarrollamos el determinante por Sarrus.

Ejercicio 6: *Resuelve por Cramer el siguiente sistema y comprueba el resultado:*

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ x+y-z=2 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

a)

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{3}{3-4}=-3;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{6-2-8-3}{-1}=7;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-2}{-1}=2$$

b) Comprobación:

$$\begin{cases} -3+4=1 \\ -3+7-2=2 \\ -6+6=0 \end{cases}$$

Ejercicio 7: Dada la matriz A, halla su inversa mediante determinantes y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Como $|A|\neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-5;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{1} A^*=\begin{pmatrix}3 & -5 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{2} (A^*)'=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ -5 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ -5 & -1 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 5 & 1 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 5 & 1 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+0+4 & 0+0+0 & 2+0-2\\ -3+5-2 & 0+1+0 & 2-3+1\\ -6+0+6 & 0+0+0 & 4+0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1 Escribimos la adjunta de A.
2 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

Ejercicio 8: *Si A es una matriz cuadrada de orden tres y su determinante vale 8, halla el determinante de la matriz 2·A.* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2A|=\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} \overset{1}{=} 2^3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=8\cdot|A|=8\cdot 8=64$$

[1] Extraemos fuera del determinante el factor 2 de las tres filas.

Ejercicio 9: *Si $\vec{a}(1,-1,2)$ y $\vec{b}(2,1,3)$, calcula:* **a)** $(\vec{a},\vec{b})$; **b)** $\vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$; **c)** $\vec{a}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})$; **d)** $\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})$. (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(1,-1,2)\cdot(2,1,3)}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{4+1+9}} = \frac{2-1+6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7}{2\sqrt{21}} \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 40^{o}12'10''$$

b)

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) \overset{1}{=} \vec{a}\cdot 7 = 7\vec{a} = 7\cdot(1,-1,2) = (7,-7,14)$$

c)

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{2}{=} 0$$

d)

$$\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{a}\wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{a}\wedge(-5\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i}-13\vec{j}-4\vec{k}$$

1 El cálculo del paréntesis lo hemos hecho en el apartado anterior.
2 Ya que tiene dos filas iguales.