Índice: Criterio de la variación del signo de la derivada segunda. Criterio de la derivada primera. Condición necesaria de punto de inflexión. Problemas.

1.- Criterio de la variación del signo de la derivada segunda

Si f' es continua en x_0 y existe un entorno de dicho punto en el que f" es:

a) positiva a ambos lados de x_0, entonces f es convexa en x_0.

b) positiva a un lado de x_0 y negativa al otro, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

c) negativa a ambos lados de x_0, entonces f es cóncava en x_0.

* * *

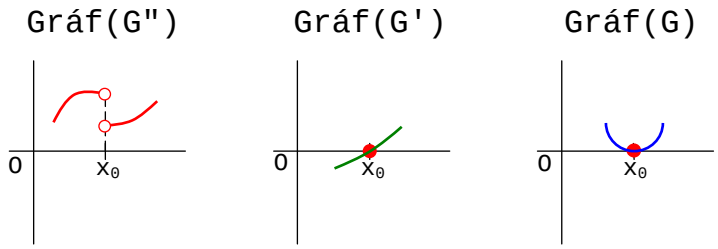
Demostremos,[1] por ejemplo, el primer apartado.

1º) Señalamos en rojo lo que conocemos de la función G y sus derivadas:

- Como $G(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$Gráf(G).
- Como $G'(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$Gráf(G').
- Como G"=f", G" es positiva a ambos lados de x_0.

2º) Deducimos el comportamiento de G en x_0:

- Como G" es positiva a izquierda y derecha de x_0, G' crece a ambos lados de x_0; y como es continua en x_0 (por serlo[2] f'), podemos dibujar su gráfica (verde) en un entorno de x_0.
- Como G' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de x_0, G decrece a la izquierda y crece a la derecha de x_0; y como es continua en x_0 (por ser derivable en él), teniendo en cuenta que la tangente a la gráfica de G en dicho punto es el eje de abscisas por ser $G'(x_0)=0$, podemos dibujar su gráfica (azul) en un entorno de x_0.



CONCLUSIÓN: la función G es convexa[3] en x_0. Por tanto, f también.

* * *

El criterio de la derivada segunda, visto en la lección anterior,

[1] Puedes intentar la demostración por tu cuenta. Basta que hagas los casos 9), 10), 11) y 12) del EJERCICIO 2 contenido en *Ejercicio 6.2*.
[2] Como $G'(x)=f'(x)-f(x_0)$, G' es una traslación vertical de f'. También podemos demostrar la continuidad de G' en x_0 echando mano de la definición.
[3] Como G">0 a ambos lados de x_0, la función G también es *convexa en un entorno de x_0*.

junto con el que acabamos de ver nos permiten estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de una función sin necesidad de calcular ninguna derivada más.

* * *

Para verlo, analicemos de nuevo la función $f(x)=3x^5-5x^4+10$.

Después de aplicar el criterio de la derivada segunda habíamos llegado al siguiente resultado:

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f" es	-	-	+
f es	cóncava	cóncava	convexa

Sólo nos quedan por estudiar los puntos x=0 y x=1, en los que se anula la derivada segunda. Ahora bien, como la función f' es continua en dichos puntos (por ser derivable en ellos), por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda concluimos que la función es cóncava en x=0 y tiene un punto de inflexión en x=1.

* * *

Veamos otro ejemplo. Estudiemos la función $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$.

Primero aplicamos el criterio de la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{x^2-(x-1)2x}{x^4}=\frac{2-x}{x^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{-x^3-(2-x)3x^2}{x^6}=\frac{2(x-3)}{x^4}$$

Por tanto:

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
f" es	-	-	+
f es	cóncava	cóncava	convexa

Como x=0 no pertenece al dominio de la función, sólo falta estudiar el punto x=3, en el que se anula la derivada segunda. Ahora bien, como la función f' es continua en dicho punto (por ser derivable en él), por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda concluimos que la función tiene en x=3 un punto de inflexión.

Resumiendo:

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
f es	cóncava	cóncava	convexa

x	y	Clasificación
3	2/9	P.I.

2.- Criterio de la derivada primera

a) Si f' es creciente en x_0, entonces f es convexa en x_0.

b) Si f' es decreciente en x_0, entonces f es cóncava en x_0.

c) Si f' tiene un extremo relativo en x_0, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

* * *

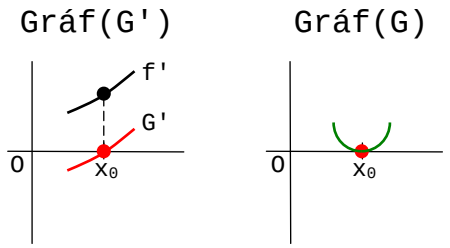
Demostremos,[1] por ejemplo, el primer apartado.

1º) Señalamos en rojo lo que conocemos de la función G y sus derivadas.

- Como $G(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$Gráf(G).
- Como $G'(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$Gráf(G').
- Como G' es una traslación vertical de f', G' es creciente en x_0.

2º) Deducimos el comportamiento de G en x_0:

- Como G' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de x_0, G decrece a la izquierda y crece a la derecha de x_0; y como es continua en x_0 (por ser derivable), teniendo en cuenta que la tangente a la gráfica de G en dicho punto es el eje de abscisas por ser $G'(x_0)=0$, podemos dibujar su gráfica (verde) en un entorno de x_0.

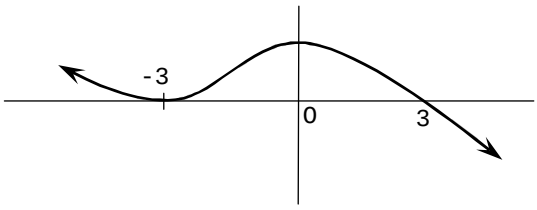


CONCLUSIÓN: la función G es convexa en x_0. Por tanto, f también.

* * *

Este criterio es de especial aplicación cuando se conoce la gráfica de la función derivada.

Por ejemplo, si la gráfica de la función f' es la que aparece dibujada a continuación, estudiemos la curvatura y los puntos de inflexión de la función f:



De la gráfica de la función f' y del criterio que acabamos de ver se deduce lo siguiente:

Intervalos y puntos	$(-\infty,-3)$	x=-3	(-3,0)	x=0	$(0,+\infty)$
f'	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente
f	cóncava	P.I.	convexa	P.I.	cóncava

[1] Puedes intentar la demostración por tu cuenta. Basta que hagas los casos 13), 14), 15) y 16) del EJERCICIO 2 contenido en *Ejercicio 6.2*.

3.- Condición necesaria de punto de inflexión

Si f tiene un punto de inflexión en x_0 y f' está definida en un entorno de x_0 y es derivable en dicho punto,[1] entonces $f''(x_0)=0$.

* * *

En efecto,[2] si $f''(x_0)\neq 0$, por el criterio de la derivada segunda f sería cóncava o convexa en x_0. Pero f tiene un punto de inflexión en x_0. Esto no puede ser. Por tanto, $f''(x_0)=0$.

* * *

Por ejemplo. Dada la función $y=x^3+ax^2+bx+c$, calcula los parámetros a, b y c si se sabe que dicha función tiene un punto de inflexión en 1 y que la recta tangente en el punto de abscisa 2 es $9x+y-18=0$.

Teniendo en cuenta la condición necesaria de punto de inflexión, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y"
1			0
2	0	-9	

Como $y=x^3+ax^2+bx+c$, $y'=3x^2+2ax+b$ e $y''=6x+2a$.

Como (1,0) es un punto de la gráfica de y", $0=6+2a$.

Como (2,0) es un punto de la gráfica de y, $0=8+4a+2b+c$.

Como (2,-9) es un punto de la gráfica de y', $-9=12+4a+b$.

Resolviendo el sistema, se obtienen los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} \boxed{a=-3} \\ 4a+2b+c=-8 \\ 4a+b=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12+2b+c=-8 \\ -12+b=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12-18+c=-8 \\ \boxed{b=-9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{c=22}$$

* * *

Por ejemplo, vamos a ver que la función $f(x)=(x-1)^3+\operatorname{sen} x$ tiene un punto de inflexión en el intervalo $(0,\pi)$.

Se procede como sigue:

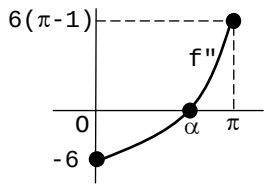
1º) Como la condición necesaria de punto de inflexión es que la derivada segunda valga cero, calculamos f":

$$f'(x)=3(x-1)^2+\cos x \Rightarrow f''(x)=6(x-1)-\operatorname{sen} x$$

2º) Como la función f" cumple las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(0,\pi)$ tal que $f''(\alpha)=0$:

a) $f''(0)\cdot f''(\pi)<0$:

- $f''(0)=-6<0$.
- $f''(\pi)=6(\pi-1)>0$.



[1] La función f puede tener un punto de inflexión en x_0 y no existir $f''(x_0)$. Por ejemplo, la función $f(x)=x^{5/3}$ en x=0.

[2] La demostración es por reducción al absurdo.

b) f" es continua en $[0,\pi]$:

- $[0,\pi]\subset Dom(f")=Dom(f')=Dom(f)=R$.
- Si $a\in[0,\pi]$:

  $\lim_{x\to a} f"(x)=\lim_{x\to a}[6(x-1)-\operatorname{sen} x]=6(a-1)-\operatorname{sen} a=f"(a)$

3º) Como f' es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f" tiene signos distintos a izquierda y derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda, f tiene en α un punto de inflexión.

4.- Problemas

1) Resuelve el problema 2 de la lección anterior mediante el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.

2) Determina los parámetros en los siguientes casos:

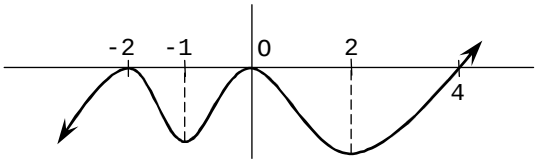
a) $y=ax^3+bx^2+cx+d$ pasa por $(0,-2)$ y tiene un punto de inflexión en $(-2,6)$ con tangente en dicho punto paralela a la recta $8x+y+10=0$.

b) $y=ax^3+bx^2+cx+d$ pasa por $(-1,1)$ y tiene en $(-2,6)$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

c) $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ tiene un extremo en $(1,3)$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y la tangente de inflexión es $y=2x$.

3) Comprueba que todas las funciones $f(x)=3x^5+10x^3+ax+b$ tienen un único punto de inflexión. Halla a y b para que la tangente en el punto de inflexión sea la recta $y=x+2$.

4) Halla k para que la función $f(x)=x^3+kx^2+5$ tenga un extremo relativo en $x=2$. Encuentra en ese caso todos los extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de inflexión.

5) La gráfica de la función $f(x)=ax^3+bx$ pasa por $(1,1)$ y en ese punto tiene una tangente paralela a $3x+y=0$. Calcula los parámetros a y b, sus extremos relativos, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos de inflexión.

6) Si la gráfica de la función f' es la que aparece dibujada a continuación, halla de la función f: a) los intervalos de monotonía; b) los extremos; c) los intervalos de concavidad y convexidad; d) los puntos de inflexión: