

Índice: Infinitésimos e infinitos. Infinitésimos y funciones acotadas. Funciones equivalentes. Sustitución de funciones equivalentes. Problemas.

1.- Infinitésimos e infinitos

Si repasas la tabla de las expresiones indeterminadas, verás que en todas ellas aparece el cero, el infinito o ambos. Pongámosles nombre:

Si x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$:

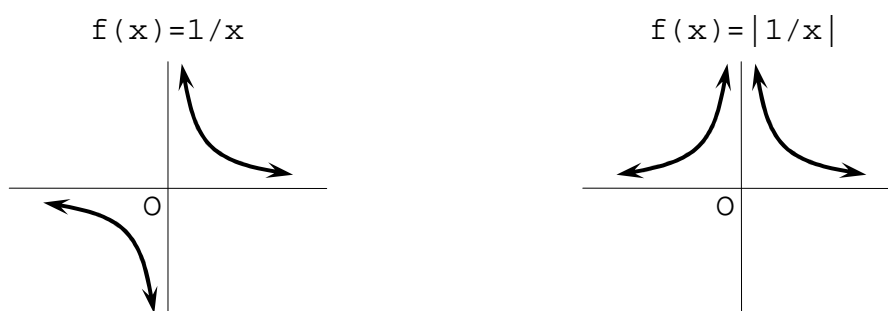
$$f \text{ es infinitésimo en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$f \text{ es infinito en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

Por ejemplo, la función $f(x)=1/x$ es infinito en 0 e infinitésimo en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |1/x| = |1/0^\pm| = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x) = 1/-\infty = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x) = 1/+\infty = 0$$

Observa que si en la definición de infinito no apareciese el valor absoluto, el primero de estos tres límites no existiría:



* * *

Del mismo modo se definen los infinitésimos por la izquierda y por la derecha en x_0 (aquí, claro está, x_0 es un número real, pues se trata de límites laterales).

Por ejemplo, la función $f(x)=1/\ln x$ es un infinitésimo por la derecha en 0:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Dado que el dominio de esta función es $(0, +\infty)$, el límite en 0 coincide con el límite lateral derecho y, por tanto, también es un infinitésimo en 0.

¹ Se trata del límite de una composición $g(f(x))$, donde $f(x)=1/x$ y $g(x)=|x|$. Si se puede hacer el cálculo directo como en este caso, no hay inconveniente siempre que se sepa lo que se está haciendo.

Otro ejemplo. La función $f(x)=(1+x)^{1/x^2}$ es infinitésimo por la izquierda e infinito¹ por la derecha en 0:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1+x)^{1/x^2} \stackrel{2}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^2} \cdot (1+x-1) \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{1/x^2} \stackrel{2}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \cdot (1+x-1) \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$$

2.- Infinitésimos y funciones acotadas

Para el cálculo de algunos límites es importante la siguiente propiedad, que no demostraremos:

El producto de un infinitésimo en x_0 por una función acotada³ es un infinitésimo en x_0 . Esto es:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ y } g \text{ es una función acotada } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

Consideremos, por ejemplo, el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\text{sen}(1/x) \cdot \text{sen } x]$$

El primer factor es un infinitésimo en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sen}(1/x) \stackrel{4}{=} \text{sen } 0 = 0$$

El límite del segundo factor, sin embargo, no existe:

Dom(f)	Im(f)
$\pi/2$	$\text{sen}(\pi/2) = 1$
$3\pi/2$	$\text{sen}(3\pi/2) = -1$
$5\pi/2$	$\text{sen}(5\pi/2) = 1$
\vdots	\vdots
\downarrow	\downarrow
$+\infty$	oscilante

Ahora bien, la función seno está acotada entre -1 y 1. Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\text{sen}(1/x) \cdot \text{sen } x] = 0$$

¹ Como una función potencial-exponencial es positiva, no es necesario poner valor absoluto.

² Ya que sale la indeterminación $1^{\pm\infty}$.

³ Recuerda que una función está acotada si lo está superior e inferiormente; que una función está acotada superiormente por el número y_0 si su gráfica no se encuentra por encima de la recta $y=y_0$; y que una función está acotada inferiormente por el número y_0 si su gráfica no se encuentra por debajo de la recta $y=y_0$.

⁴ Ya que se verifica la segunda condición del límite de la composición de funciones.

3.- Funciones equivalentes

Dos funciones, f y g , son *equivalentes* en x_0 , y se escribe " $f \sim g$ en x_0 ", si el límite de su cociente en x_0 es 1:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Por ejemplo, $3x^2 - 2x + 6 \sim 3x^2$ en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 6}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}}{3} = \frac{3 - 0 + 0}{3} = 1$$

Por ejemplo, $\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$ en 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x/2} & \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (\sqrt{1+x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (\sqrt{1+x} - 1) \cdot (\sqrt{1+x} + 1)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (1+x-1)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

4.- Sustitución de funciones equivalentes

El concepto de equivalencia de funciones solo tiene interés cuando se trata de infinitos o infinitésimos, pues permite simplificar el cálculo de algunos límites cuando se utiliza la siguiente propiedad:

Si f y g son dos funciones equivalentes en x_0 y una de ellas aparece como *factor* o *divisor* en el cálculo de un límite en x_0 , entonces se puede sustituir por la otra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot h(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot h(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)}$$

La demostración de esta propiedad es la siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot h(x)] & \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \cdot h(x) \right] = \\ & \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot h(x)] \stackrel{4}{=} 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot h(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot h(x)] \end{aligned}$$

Del mismo modo se demuestra la segunda fórmula.

¹ También puede hacerse con el cambio de variable $1+x=y^2 \Leftrightarrow x=y^2-1$.

² Multiplicamos y dividimos por $g(x)$.

³ El límite de un producto es igual al producto de los límites de los factores.

⁴ Ya que $f \sim g$ en x_0 .

5.- Problemas

- 1) Define: a) infinitésimos laterales; b) infinitos laterales.
- 2) A la vista de sus gráficas, indica en qué puntos son infinitésimos o infinitos las siguientes funciones:

a) $y=e^x$	b) $y=\ln x$	c) $y=\operatorname{sen} x$
d) $y=\cos x$	e) $y=\operatorname{tg} x$	f) $y=\operatorname{cosec} x$
g) $y=\sec x$	h) $y=\operatorname{ctg} x$	i) $y=\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$
j) $y=\operatorname{arc} \cos x$	k) $y=\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	l) $y=\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$
m) $y=\operatorname{arc} \sec x$	n) $y=\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	ñ) $(1/3)^x$

- 3) Prueba¹ que si $f(x)$ es un infinitésimo en x_0 , también son infinitésimos en x_0 las funciones:

a) $\operatorname{sen} f(x)$	b) $\operatorname{tg} f(x)$	c) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x)$
d) $\operatorname{arctg} f(x)$	e) $\ln[1+f(x)]$	f) $e^{f(x)}-1$

- 4) Halla el límite en $+\infty$ de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{\cos x}{\ln x}$	b) $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	c) $y=x^3-\operatorname{sen} x$
d) $y=\frac{2x+\operatorname{sen} x}{x}$	e) $y=\frac{\cos x}{x+8}$	f) $y=\frac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x}$
g) $y=\frac{x-\cos x}{x+\operatorname{sen} x}$	h) $y=\frac{\ln x-\operatorname{sen} x}{\ln x+\cos x}$	i) $y=\frac{x-\cos x}{x}$
j) $y=\frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\sqrt{x+2}}$	k) $y=\frac{\operatorname{sen}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$	l) $y=\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\ln x}$

- 5) Prueba que si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=1$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}=1$.

- 6) Prueba que si f y g son dos funciones equivalentes en x_0 y una de ellas aparece como divisor en el cálculo de un límite en x_0 , se puede sustituir por la otra.

- 7) Si $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, prueba que $P(x) \sim a_nx^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

- 8) Si $P(x)=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, prueba que $P(x) \sim a_1x$ en 0.

¹ Si utilizas el límite de la composición, indica la condición que se cumple en cada caso.